jt - joetex - percorsi didattici

Corso di Geometria Descrittiva: le sezioni di solidi e le sezioni coniche

Sommario

Δ - Introduzione

Il percorso che proponiamo per raggiungere un'accettabile comprensione delle sezioni coniche, ipotizzate per un secondo anno di Liceo Scientifico, parte dalla visualizzazione dei piani nel triedro. Considerate la difficoltà concettuali degli argomenti che vengono somministrati a ragazzi di circa 15 anni, escludiamo la sezione conica mediante piano **α** generico, ossia inclinato ai tre piani del triedro. Per questo motivo verrà utilizzato un piano sezionante **α** perpendicolare ad uno del triedro ed inclinato ai restanti piani.

Le conoscenze pregresse devono poggiare su semplici abilità volte a realizzare solidi semplici in Proiezioni Ortogonali. In aggiunta è consigliabile associare sempre una rappresentazione assonometrica del triedro e degli enti geometrici in esso inseriti, per consentire una visualizzazione migliore del logico quanto articolato insieme di rappresentazioni che sono proprie delle proiezioni ortogonali.

Vedremo il concetto di **traccia** del piano **α** - che è secante i piani dello spazio triedrico - mediante il quale potremo aggiungere le rette appartenenti a detto piano. Osserveremo, dunque le **tracce delle rette appartenenti ad α.**

Il passaggio dalle rette appartenenti ai poligoni ad **α** diventerà semplice se consideriamo che i lati dei poligoni altro non sono che porzioni di rette ovviamente anch'esse appartenenti al nostro piano. Per alcuni casi è previsto il ribaltamento del piano per ottenere la grandezza vera del poligono. Per dire il vero, sarà opportuno partire dalla grandezza vera del poligono sul piano ribaltato per ottenere le proiezioni ortogonali - che non conosciamo - dei poligono che appartengono ad **α** inclinato.

In queste pagine ci occuperemo di un piano inserito nel triedro in posizione specifica. Le varianti della posizione del piano che terremo in considerazione sono sei:

1. Piano α parallelo al PO
2. Piano α parallelo al PV
3. Piano α parallelo al PL
4. Piano α perpendicolare al PO ed inclinato ai restanti piani
5. Piano α perpendicolare al PV ed inclinato ai restanti piani
6. Piano α perpendicolare al PL ed inclinato ai restanti piani

Il detto piano - che chiameremo sempre **α** - conterrà poligoni o servirà a sezionare prismi, piramidi ed infine coni.

Come si è detto l'introduzione di semplici sezioni di poliedri implica la conoscenza delle proiezioni ortogonali di solidi in posizione regolare nel triedro. Tale conoscenza deve essere raggiunta nella classe prima liceo. Per questo motivo porremo un solido in posizione regolare nel triedro e ne effettueremo la sezione semplice utilizzando i piani già visti precedentemente. Le sezioni le otterremo utilizzando le rette appartenenti al solido ed al piano sezionante. In caso di piano sezionante inclinato ad esempio al PO ed al PL, sarà opportuno ribaltare il piano.

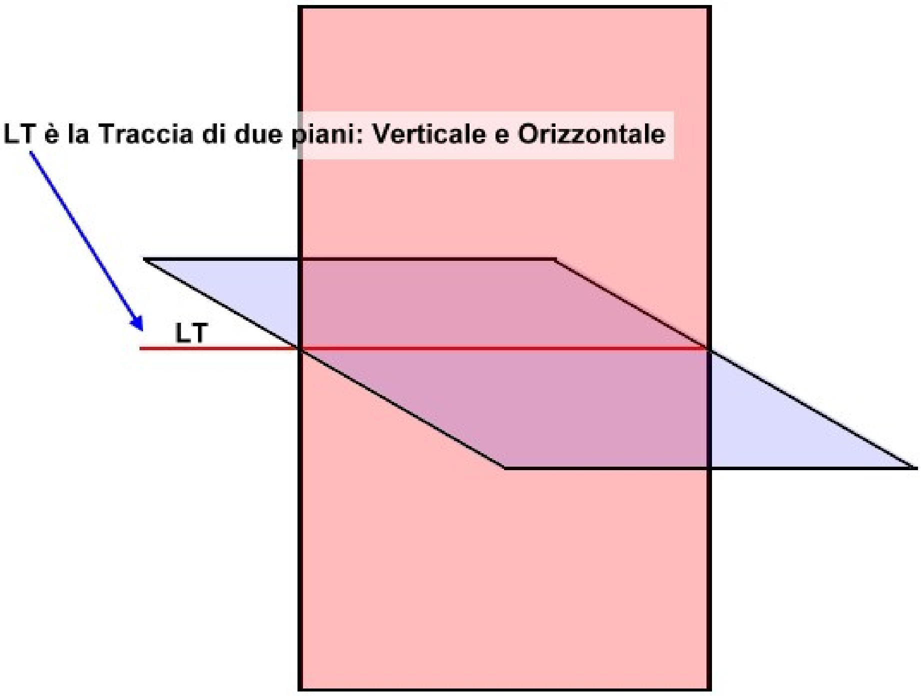
Dalla sezione dei poliedri passeremo a quella di coni introducendo il concetto di generatrice e di piani ausiliari.

Δ - Piani nello spazio triedrico

Prima di analizzare le posizioni dei piani nel triedro, dobbiamo spiegare cosa è la ***traccia di un piano*** secante un altro piano:

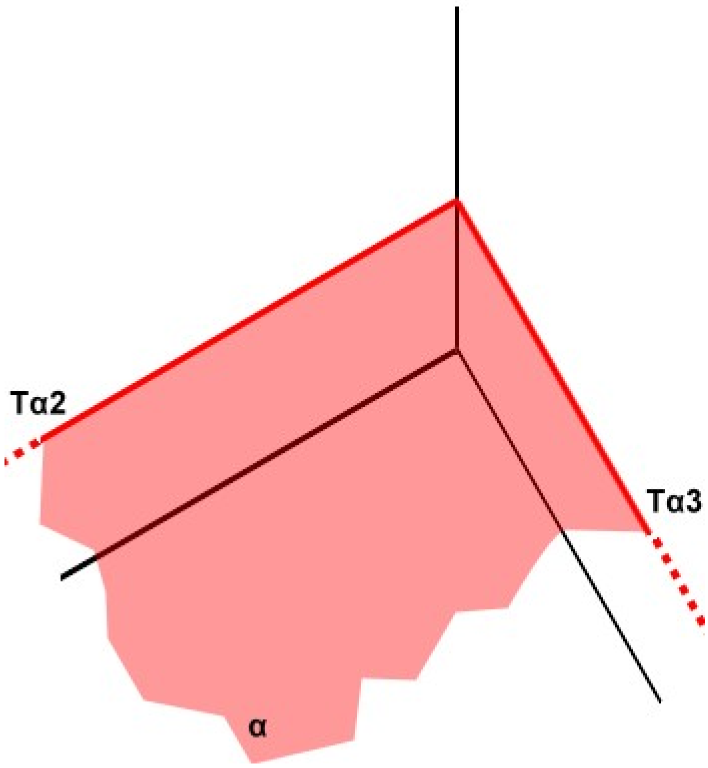
La traccia di un piano secante un altro piano è la retta comune appartenente ad i due piani.

Anche la linea di terra è una traccia: appartiene sia al piano orizzontale che al piano verticale.



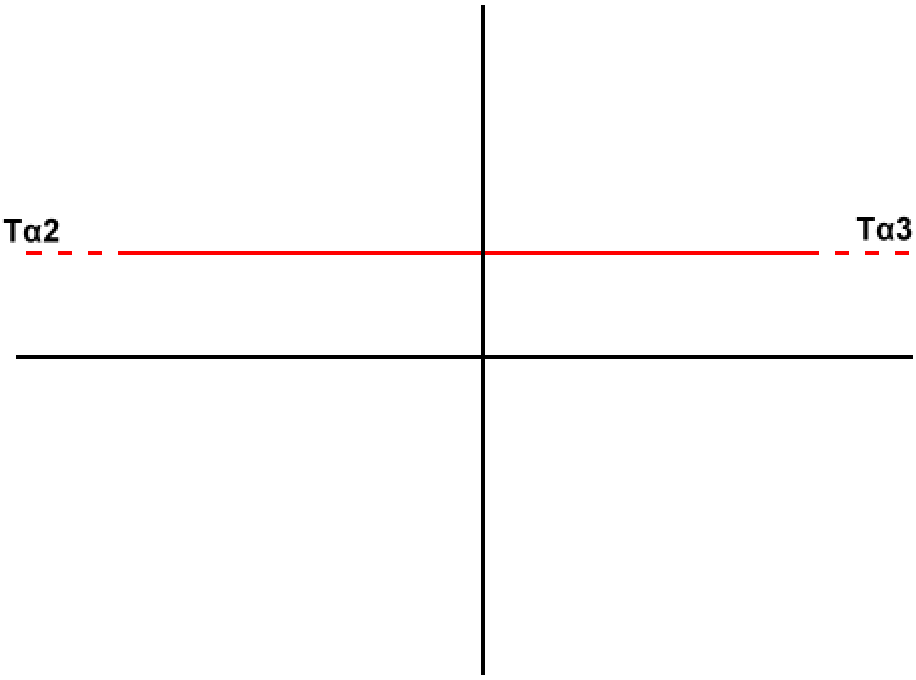
Δ - Piano α parallelo al PO

Dobbiamo ora capire come un piano può essere posizionato nel triedro. Essendo infinito il piano che chiameremo **α**, esso risulterà secante almeno con due piani del triedro. Ad esempio proviamo ad osservare un piano **α** parallelo al PO:



Come possiamo vedere il piano rosa appare parallelo al PO; all'uopo abbiamo creato una parte irregolare verso il basso che indica lo spazio infinito, mentre verso il piano Verticale ed il piano Laterale abbiamo le rette rosse che indicano come il piano **α** sia secante. ***Se il piano*** *a è parallelo al PO è necessariamente perpendicolare al PV ed al PL*. Infatti il PO è perpendicolare sia al PV che al PL; se **α** è parallelo al PO e il PO è perpendicolare sia al PV che al PL, allora **α** è perpendicolare sia al PV che al PL (proprietà transitiva).

Proviamo a vedere le proiezioni ortogonali del piano **α** parallelo (che indichiamo col simbolo //)al PO:



Memorizziamo questa rappresentazione del piano α // al PO.

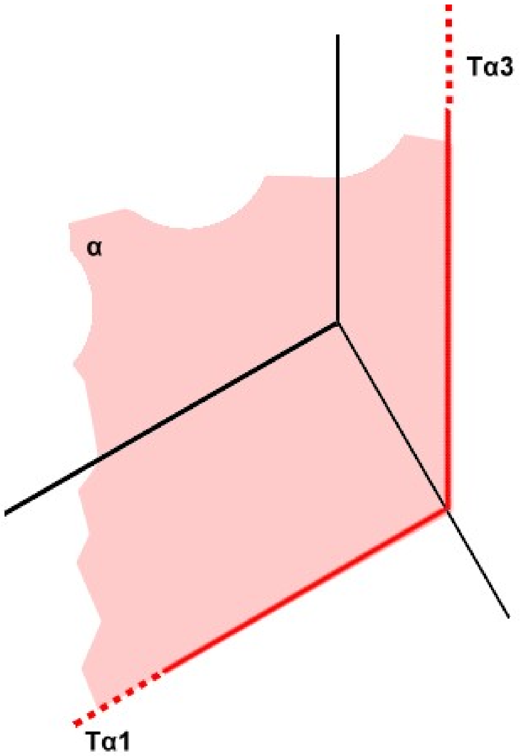
Le due tracce del piano risultano perfettamente parallele alla linea di terra perché il piano è (appunto) parallelo al PO.

La retta comune al piano **α** ed al piano verticale prende il nome di traccia, nella fattispecie Traccia (**T**) di **α** con **2** (due indica il piano verticale). Sostanzialmente la retta rossa appartiene sia ad **α** che al piano verticale (PV).

La stessa cosa vale per la retta **Tα3** che appartiene sia al piano laterale che ad **α**.

Δ - Piano α parallelo al PV

Osserviamo il piano **α** parallelo al PV nella prossima assonometria

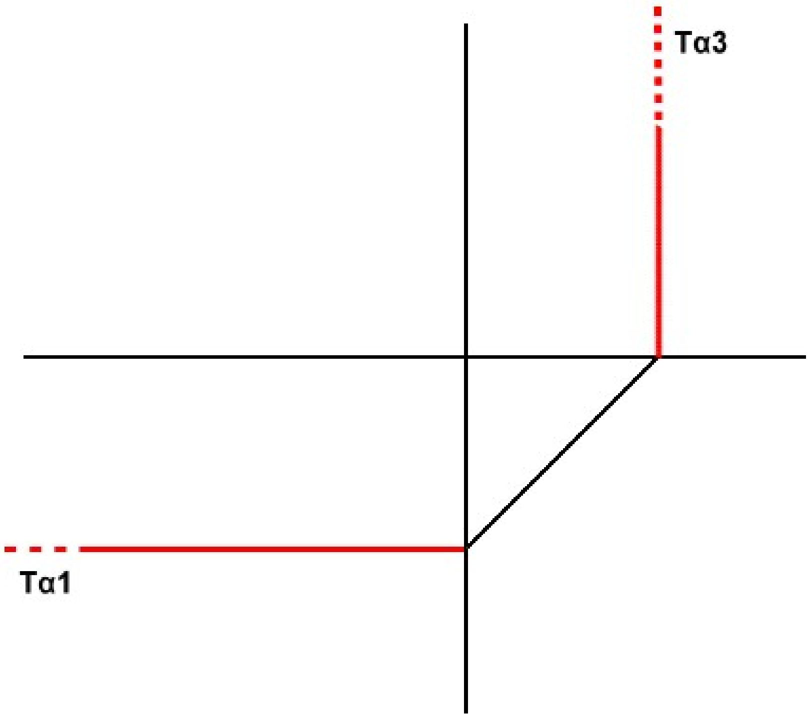


Se il piano α è parallelo al PV è necessariamente perpendicolare al PO ed al PL.

Le tracce sono:

1. Tα1 che appartiene sia ad α che al PO (piano 1)
2. Tα3 che appartiene sia ad α che al PL (piano 3)

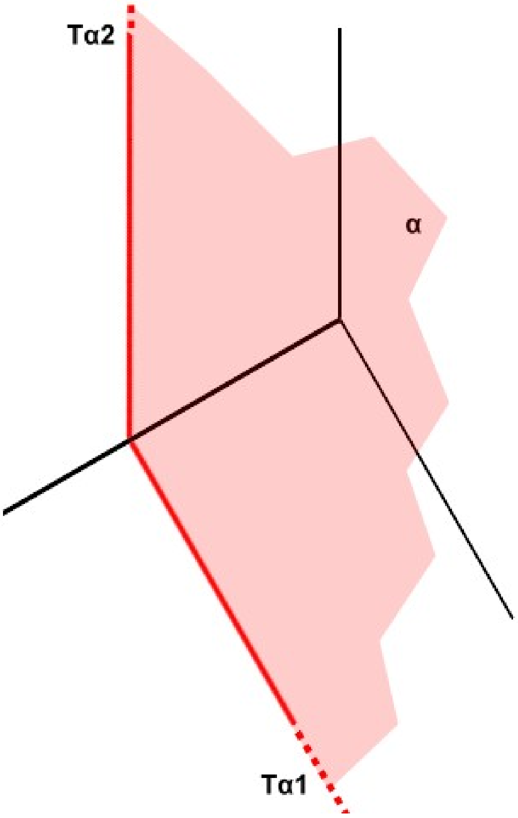
Vediamo le proiezioni ortogonali:



Memorizziamo questa rappresentazione del piano α // al PV.

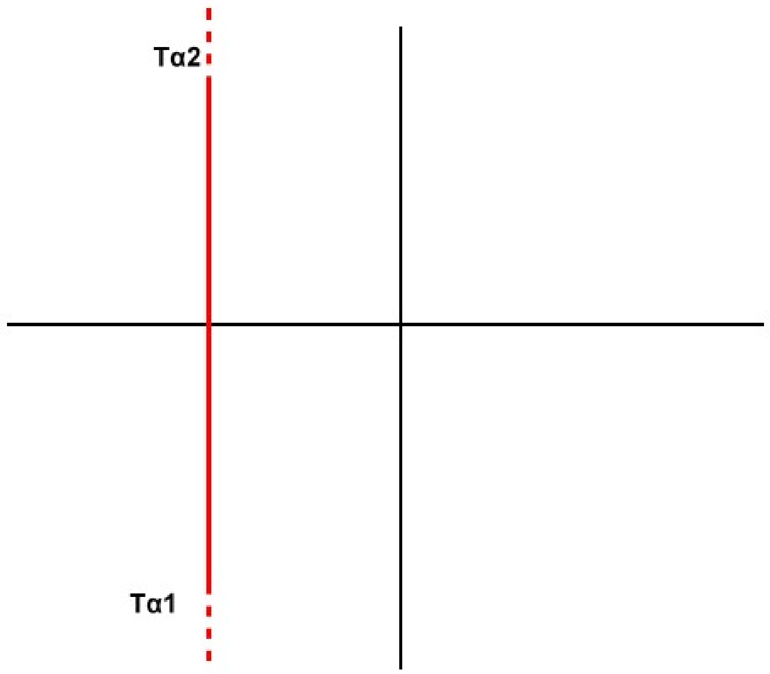
Δ - Piano α parallelo al PL

Il piano α parallelo al PL ovviamente non può avere tracce su questo piano, per cui le sue due tracce saranno Tα2 e Tα1, entrambe parallele - rispettivamente - all'asse Z (linea verticale) e all'asse Y (linea di terra laterale).



Ricordiamo che nelle proiezioni assonometriche gli assi X, Y e Z non sono veramente ortogonali tra loro, ma noi li immaginiamo tali per ricostruire mentalmente un effetto tridimensionale. Infatti nella figura precedente Tα2 è perpendicolare al piano orizzontale e quindi all'asse X; siamo obbligati a pensare che Tα2 sia ortogonale con X anche se effettivamente X è inclinato di 120° rispetto a Z e non di 90° come dovrebbe essere effettivamente.

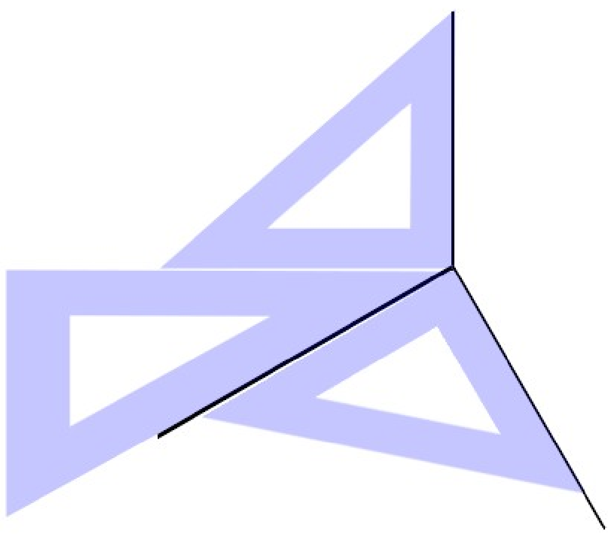
Torniamo al nostro discorso. ***Se il piano a è parallelo al PL è necessariamente perpendicolare al PO ed al PV.***



Memorizziamo questa rappresentazione del piano α // al PV.

Δ - Tavola 1

Dividiamo il foglio di grandezza 33x42 cm in 6 parti uguali; nelle tre parti superiori inseriamo rispettivamente le Proiezioni Ortogonali del piano parallelo al PO (esercizio 1), poi di quello parallelo al PV (esercizio 2) ed infine di quello parallelo al PL (esercizio 3). Nei riquadri sottostanti inseriamo i disegni delle proiezioni ortogonali (esercizi 1A, 2A, 3A). Per realizzare gli assi assonometrici utilizziamo il seguente schema di squadre:



La tavola conterrà 6 disegni, con le proiezioni ortogonali e le assonometrie del piano α parallelo - a turno - ad uno dei piani del triedro:

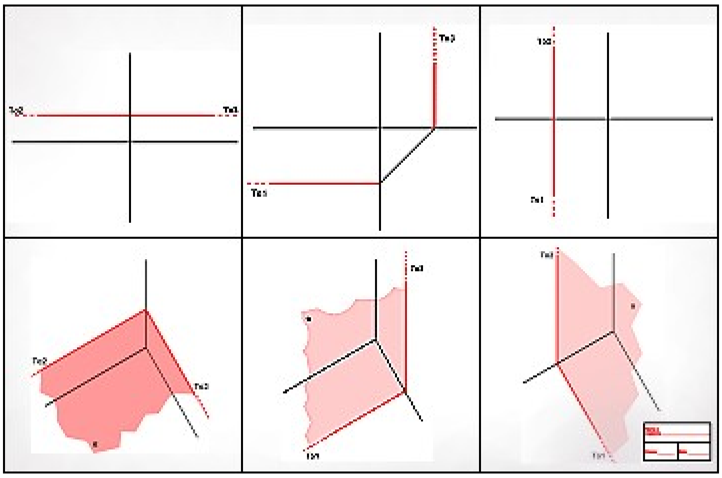


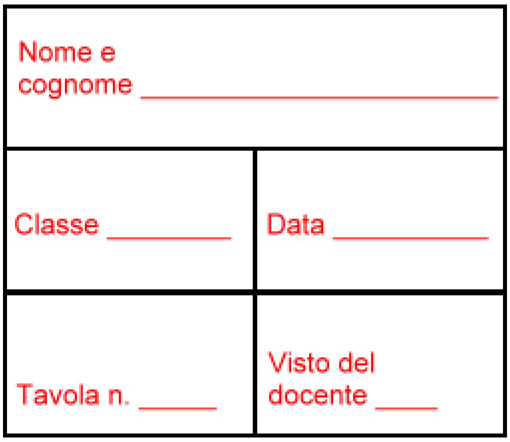
Tavola 1

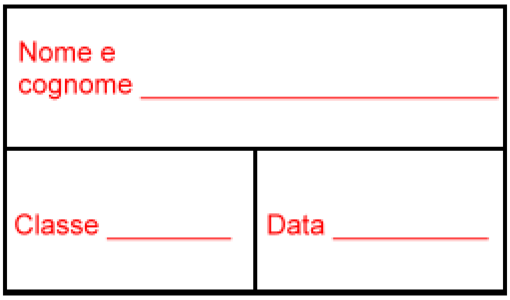
esercizio 1	esercizio 2	esercizio 3
esercizio 1A	esercizio 2A	esercizio 3A

Coloriamo con del retino o con le matite colorate il piano alfa visibile soltanto nelle proiezioni assonometriche (esercizi 1A, 2A, 3A).

La tavola deve contenere in basso a destra il nome e cognome dello studente, la data e la classe. Molti docenti richiedono la realizzazione di squadratura del foglio e di un cartiglio.

Per cartiglio intendiamo una struttura grafica atta ad ospitare i dati sopra indicati:

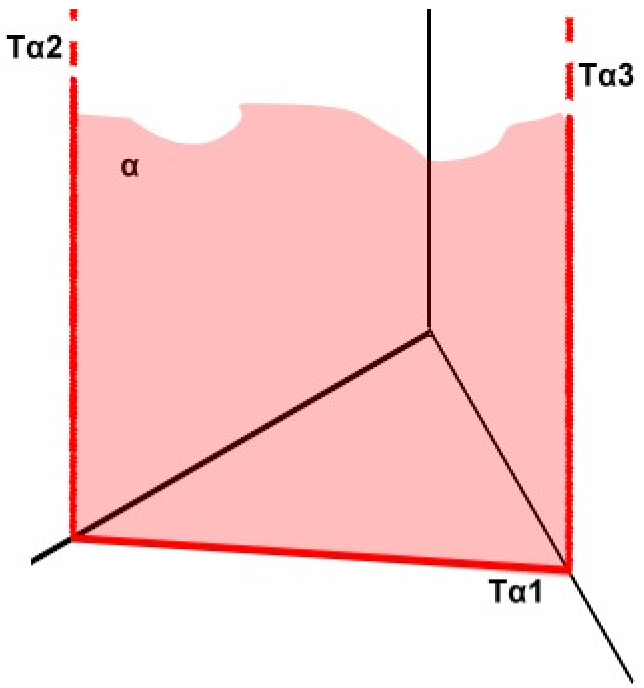




Il tutto va realizzato con ordine e bella grafia.

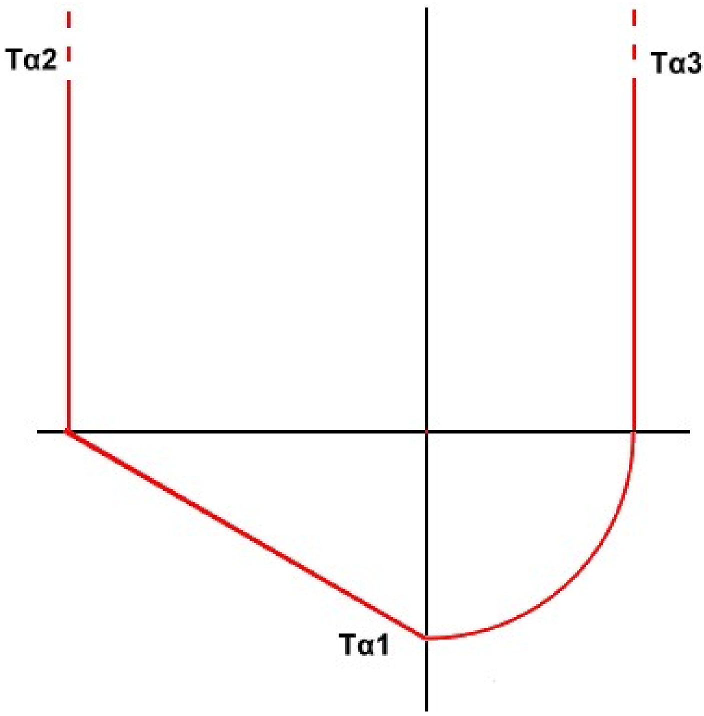
Δ - Piano α perpendicolare al PO ed inclinato ai restanti piani

Ora dobbiamo vedere il piano **α** perpendicolare (utilizziamo il simbolo ⊥) ad uno ed inclinato (utilizziamo il simbolo \) a restanti due piani del triedro. Osserviamo un primo caso in cui il piano è perpendicolare al PO ed inclinato ai restanti piani (PV e PL)



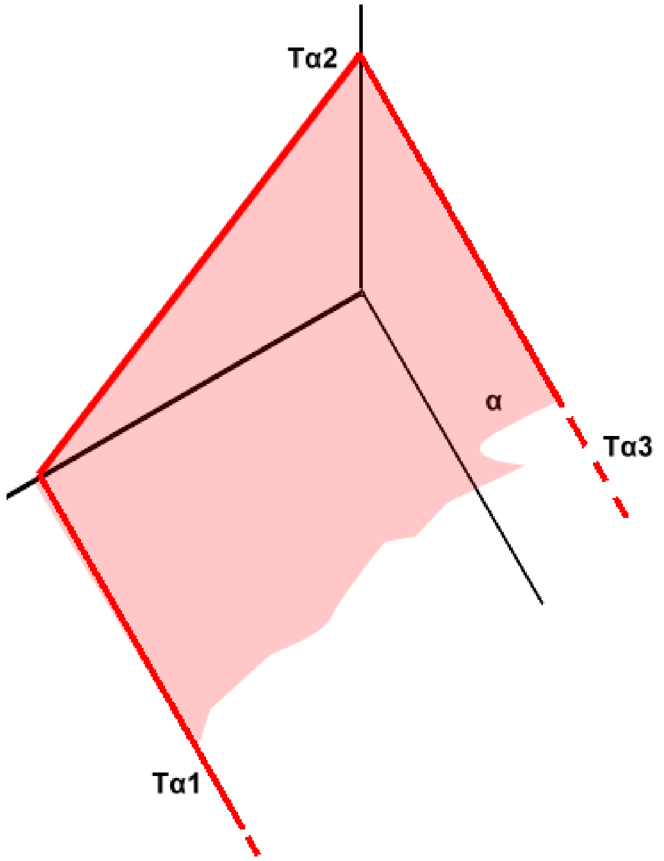
Per memorizzare questa posizione del piano **α** nel triedro è opportuno ricordare quanto segue:

Se il piano α è Perpendicolare al PO ed inclinato al PV e al PL, la traccia inclinata agli assi si trova sul PO. Le altre due tracce sono perpendicolari al PO.

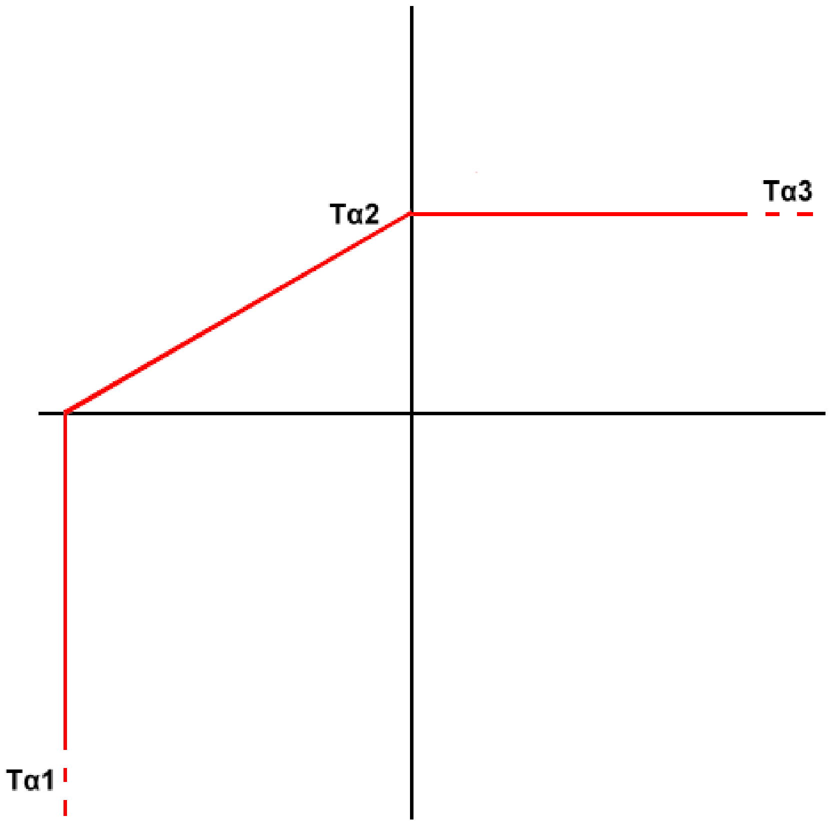


Memorizziamo questa rappresentazione del piano α ⊥ PO ed \ (inclinato) al PV ed al PL.

Δ - Piano α perpendicolare al PV ed inclinato ai restanti piani

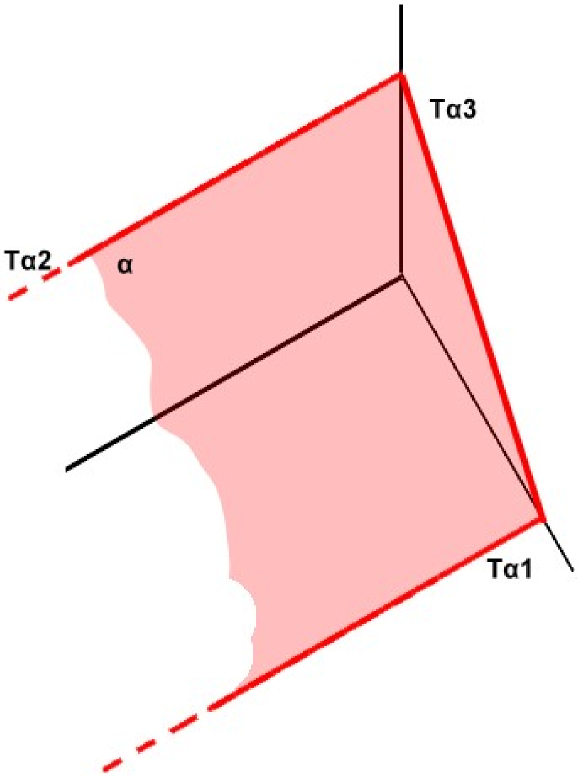


Se il piano α è perpendicolare al PV ed inclinato ai restanti piani la traccia inclinata è sul PV. Le altre due tracce saranno perpendicolari al PV.

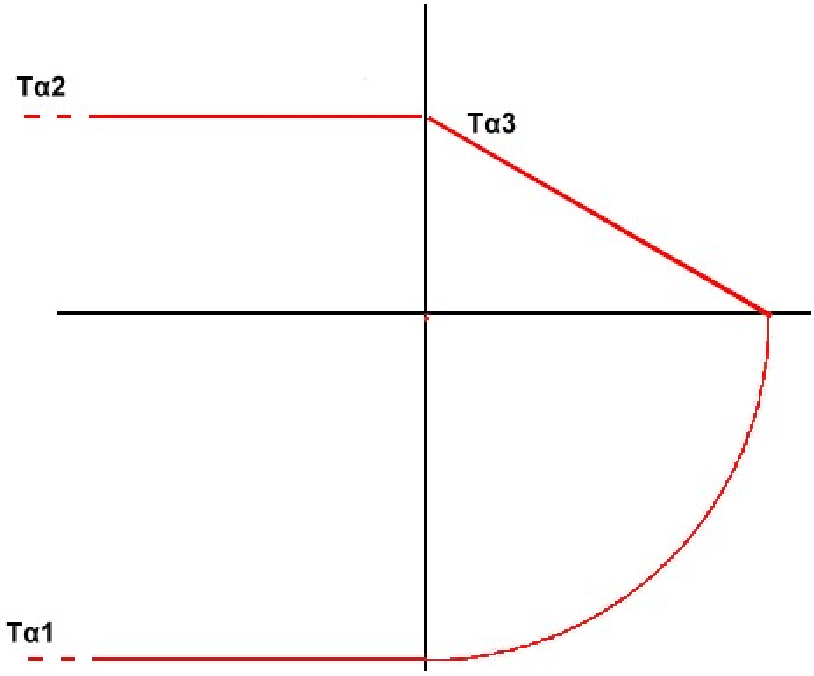


Memorizziamo questa rappresentazione del piano α ⊥ PV ed \ (inclinato) al PO ed al PL.

Δ - Piano α perpendicolare al PL ed inclinato ai restanti piani



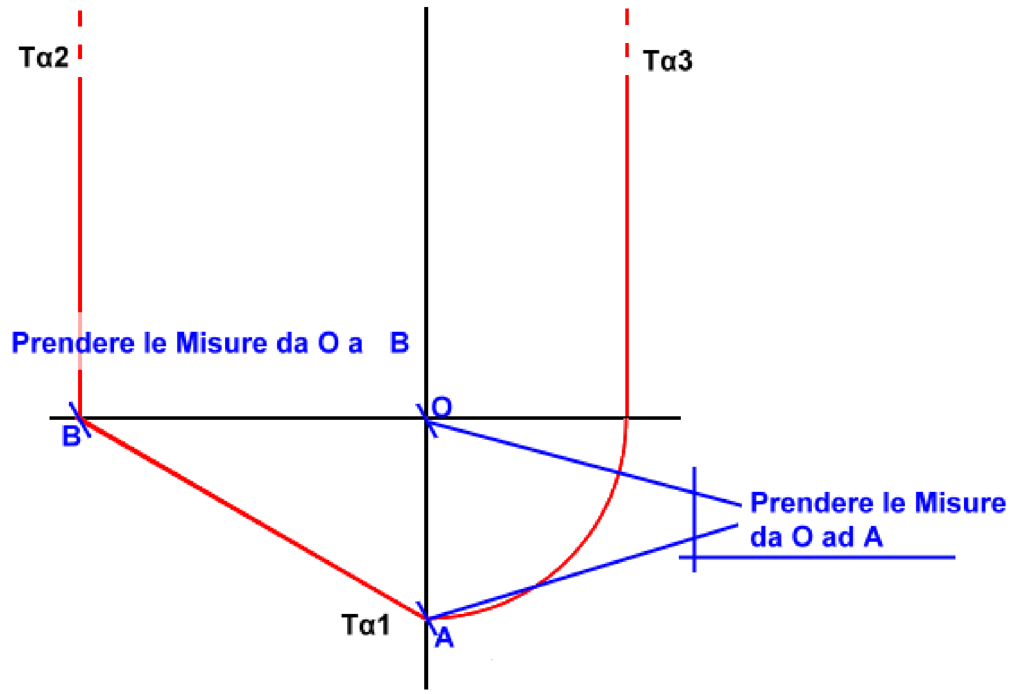
Se il piano a è perpendicolare al PL ed inclinato ai restanti piani la traccia inclinata è sul PL. Le altre due tracce saranno perpendicolari al PL.



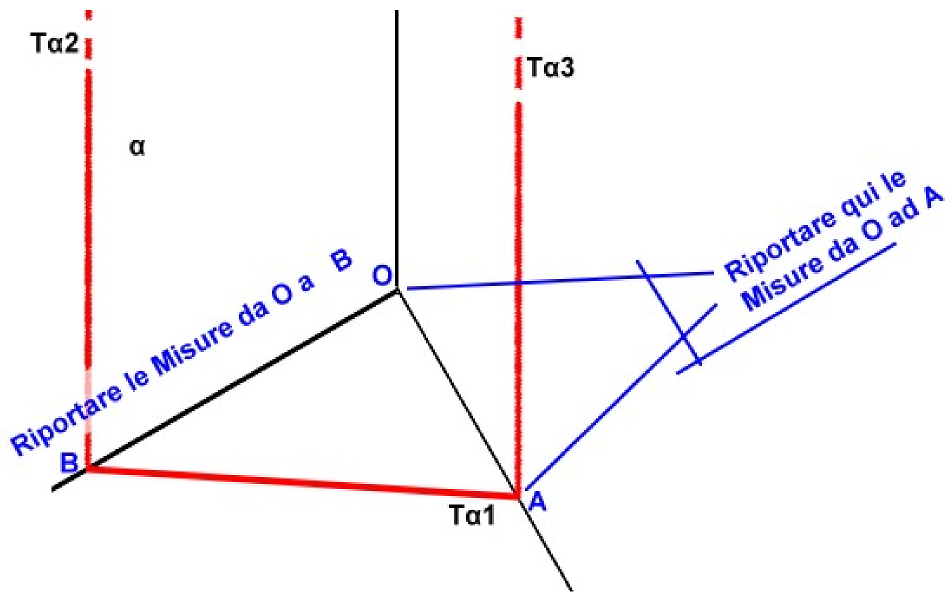
Memorizziamo questa rappresentazione del piano α ⊥ PL ed \ (inclinato) al PO ed al PV.

Δ - Tavola 2

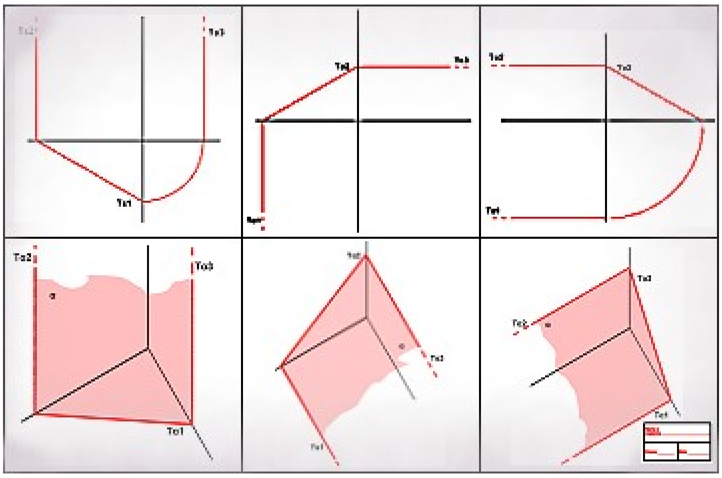
Dividiamo nuovamente il foglio di grandezza 33x42 cm in 6 parti uguali; nelle tre parti superiori inseriamo le Proiezioni Ortogonali del piano perpendicolare al PO ed inclinato ai restanti piani, poi di quello perpendicolare al PV ed infine di quello perpendicolare al PL, sempre inclinati ai restanti piani. Nei riquadri sottostanti inseriamo i disegni delle proiezioni ortogonali. Per realizzare gli assi assonometrici dobbiamo prendere le misure sugli assi dalle proiezioni ortogonali e riportarli su X, Y e Z nel seguente modo:



Prendiamo le misure col compasso dal punto O (origine degli assi ortogonali) sino a A indicato nella figure e li riportiamo sull'asse Y a partire da O; la stessa cosa facciamo con la distanza OB.



Realizziamo la tavola n.2

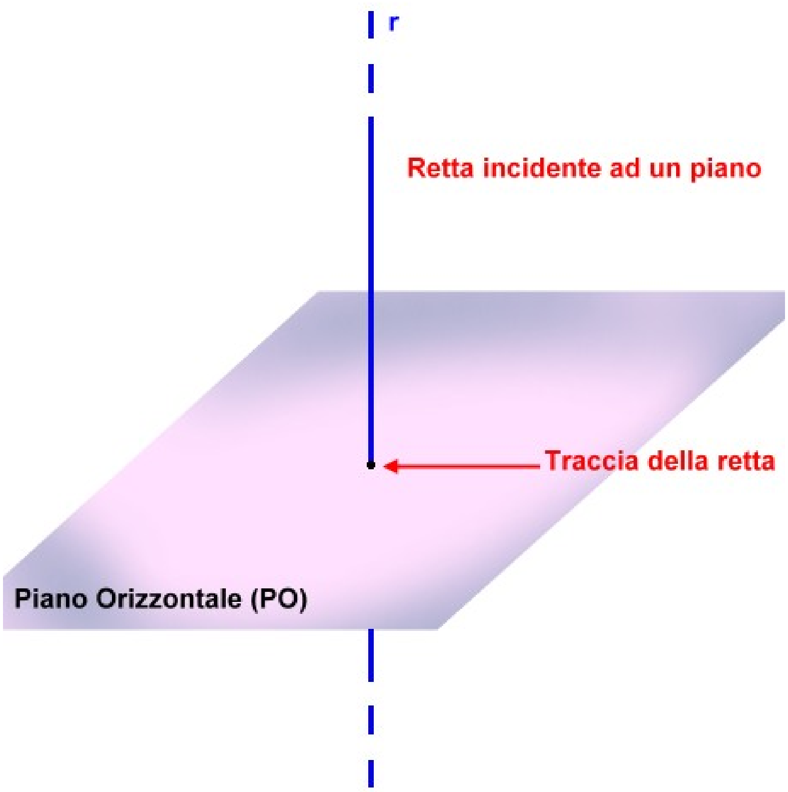


Δ - Rette appartenenti a piani

Il secondo passo che ci condurrà verso le sezioni di solidi ed infine quelle coniche, è quello che vede le rette appartenenti al piano alfa generico.

Prima di inoltrarci nella costruzione di rette appartenenti al piano α dobbiamo introdurre il concetto di ***traccia della retta*** incidente ad un piano:

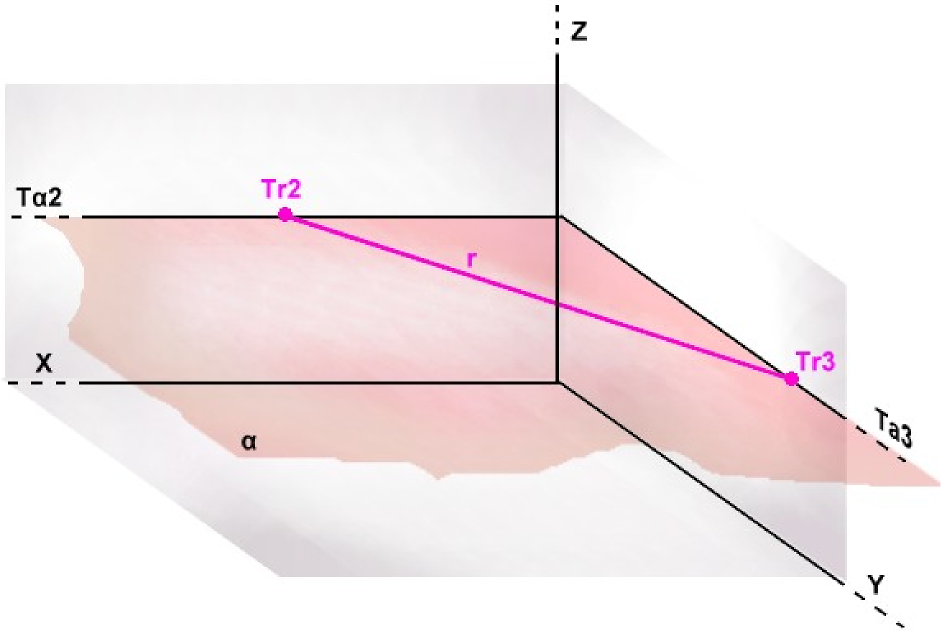
La traccia di una retta incidente ad un piano è il punto comune alla retta ed al piano.



Considerata la nostra decisione di fare appartenere una retta al piano α, dobbiamo ricordare quali sono le condizioni di appartenenza di una retta ad un piano.

Una retta appartiene ad un piano quando due punti della retta appartengono al piano.

In alcune situazioni particolari la retta presenta le sue tracce che cadono sopra le tracce del piano. Questa condizione soddisfa pienamente quella sopra citata, in quanto due punti della retta - le sue due tracce - sono proprio sopra le tracce del piano:



La retta di colore rosa ha le **Tracce** - che raggiungono il PV ed il PL ed ingrandite con un dischetto anch'esso rosa - proprio sopra le tracce nere del piano α. Due punti della retta - le tracce - appartengono alle tracce del piano e quindi al piano: in questo modo dimostriamo che la retta appartiene ad α.

Se le tracce di una retta cadono sulle tracce di un piano, quella retta appartiene al piano.

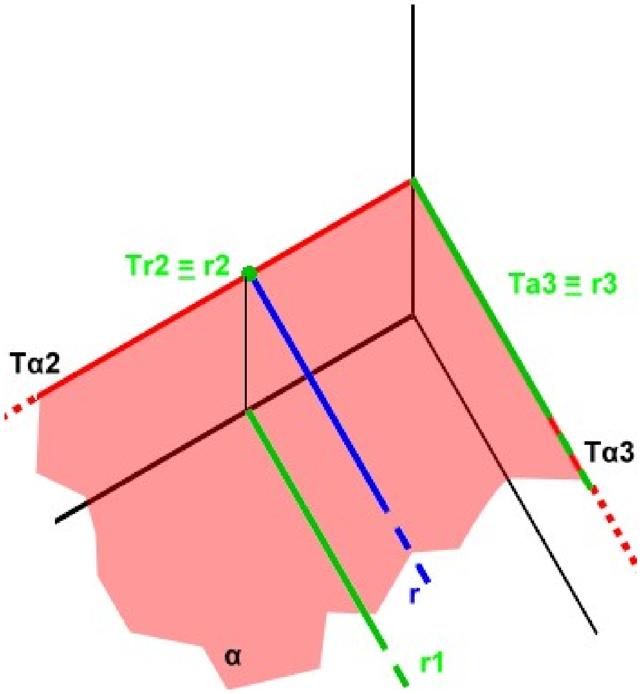
Δ - Rette appartenenti al piano α perpendicolari ad una sua traccia. Il piano α è parallelo ad uno del triedro

1. Retta ⊥ al PV ∈ al piano α // al PO

La retta della prossima immagine è perpendicolare al piano verticale e appartenente al piano α parallelo al PO. La retta è indicata col nome generico di "**r**". Le tracce sono indicate col nome generico di "**T**".

"Tr" significa che si tratta di una traccia di una retta

"Tα" significa che si tratta di una traccia di un piano.



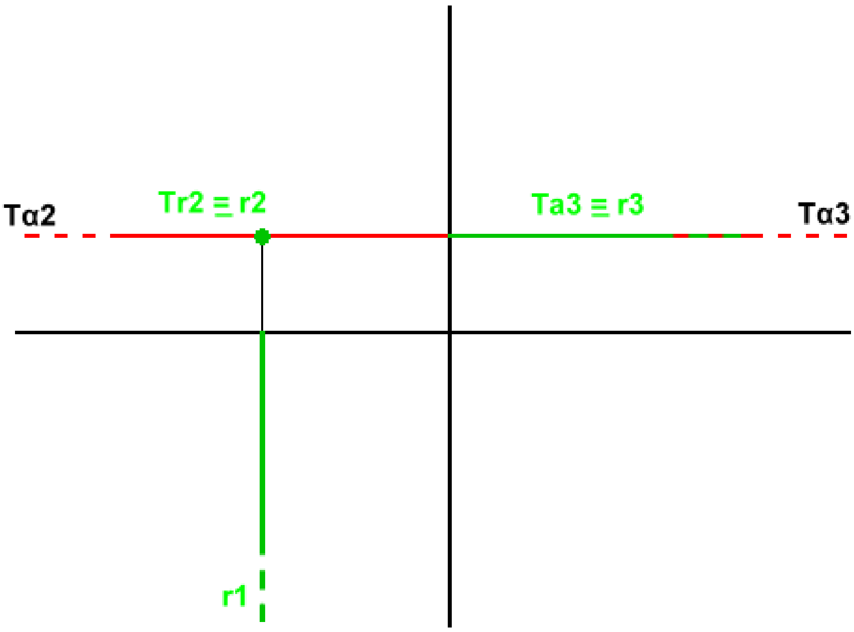
La retta "r" è parallela al PO ed al PL, ossia perpendicolare al PV. La retta "r" ha la traccia Tr2 che è collocata sopra la traccia Tα2 del piano α perché r appartiene al piano α.

Se **α** è **//** al PO ed "**r**" appartiene ∈ ad **α** anche "**r**" è parallela al PO (tradotto senza simboli: se il piano alfa è parallelo al piano orizzontale e la retta appartiene ad alfa, la retta è parallela al piano orizzontale).

Se la retta è ⊥ al PV e la traccia Tr2 della retta cade sulla traccia del piano **α**, allora "**r**" appartiene al piano **α**.

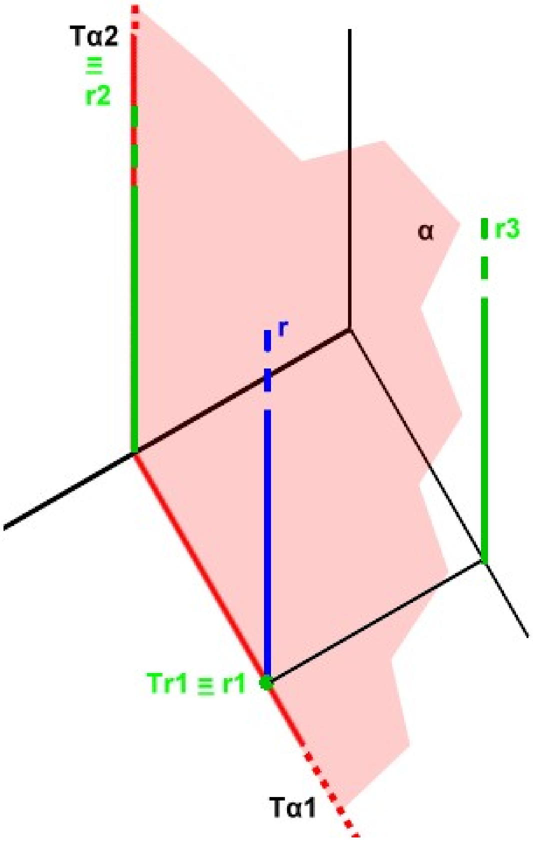
Dato che r è ortogonale al PV la sua proiezione **r2** coincide (simbolo **≡**) con la traccia. Il dischetto di colore verde indica il punto ossia la traccia di r e la sua proiezione sul PV. La retta è di colore blu mentre le sue proiezioni sul PO e sul PL sono di colore verde.

Si dimostra che r appartiene ad α perché la proiezione di r sul PL cade esattamente sulla traccia Tα3; sono visibili nelle immagini sia la proiezione verde di r sia la traccia rossa di α.

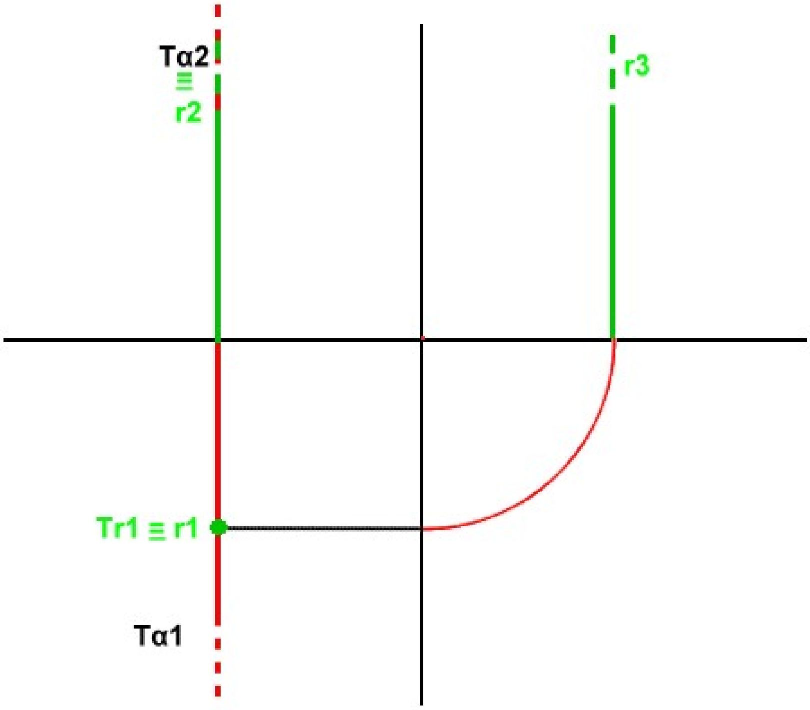


2. Retta ⊥ al PO ed ∈ al piano α // al PL

L'immagine a seguire rappresenta una retta normale al PO appartenente ad un piano α parallelo al PL. L'aggettivo **normale** è spesso sinonimo di perpendicolare.

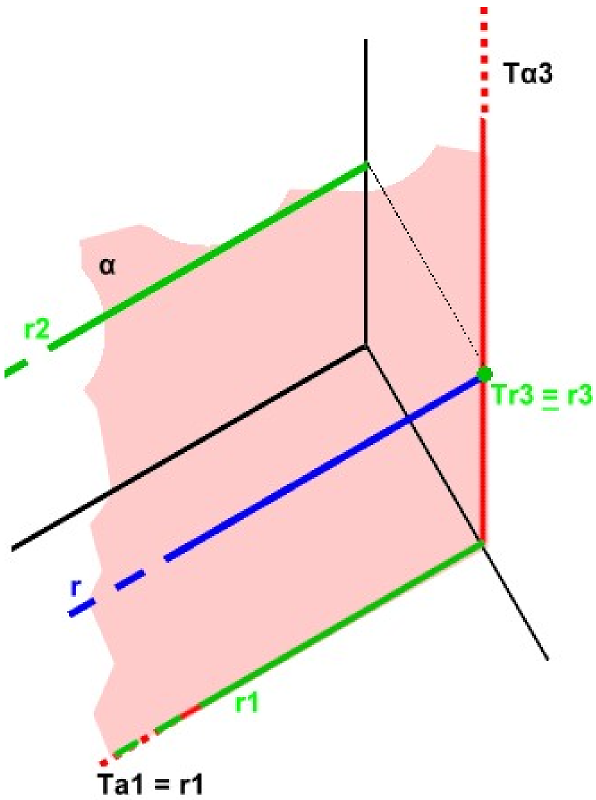


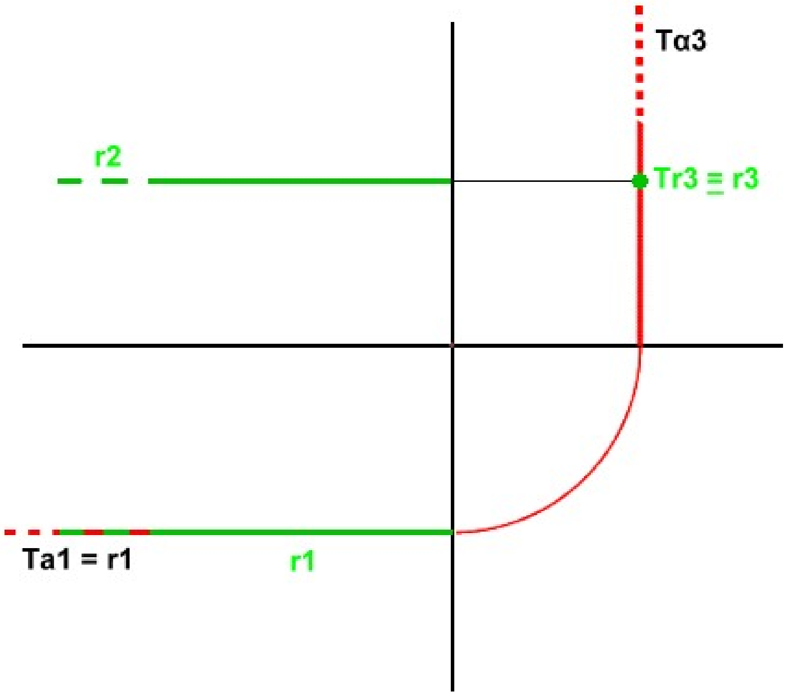
Poiché la retta è in posizione normale rispetto al PO, la proiezione sul PO della retta è un punto che coincide con la traccia Tr1 della retta stessa. La proiezione sul PV cade sulla traccia Tα2 e quindi coincide con essa. Nell'immagine vediamo la proiezione r2 di colore verde sovrapposta alla traccia Tα2 di colore rosso.



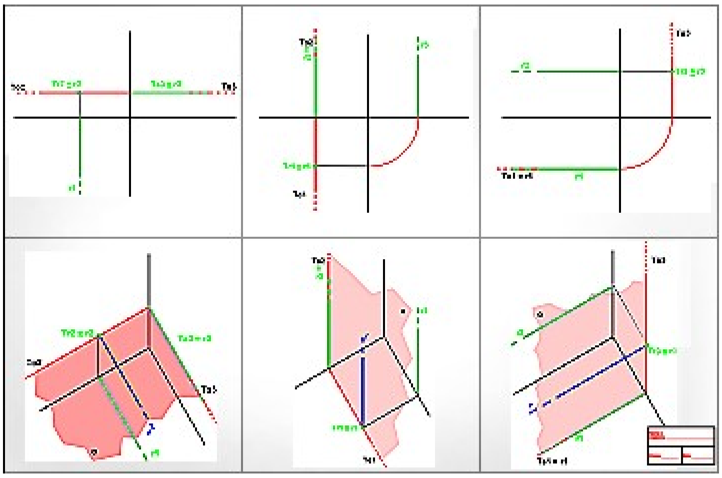
3. Retta ⊥ al PL ed ∈ al piano α

Retta perpendicolare al PL ed appartenente ad un piano α parallelo al PV





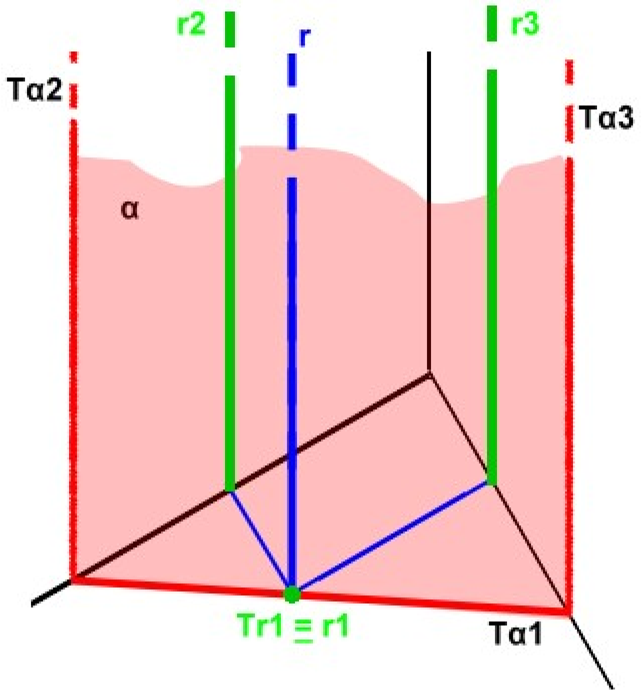
Δ - Tavola 3



Δ - Retta perpendicolare ai piani del triedro ma appartenente ad α ortogonale ad un piano ed inclinato ai restanti

1. Retta r ⊥ al PO ed ∈ al piano α anch'esso ⊥ al PO ed inclinato ai restanti piani.

Nel prossimo disegno il piano **α** è perpendicolare al **PO** ed **inclinato ai restanti piani**. La retta **r** appartiene al piano **α** ed è posizionata perpendicolarmente rispetto alla traccia **Tα1**.



Possiamo notare che la retta di colore blu indicata con il simbolo "r" è perpendicolare alla traccia **Tα1**. Con essa crea una sua propria traccia che si chiama ***Tr1*** ossia ***T***raccia di ***r***etta col piano ***1*** (il piano 1 è sempre il piano orizzontale).

La traccia ***Tr1*** coincide con la proiezione della retta sul PO detta ***r1***;

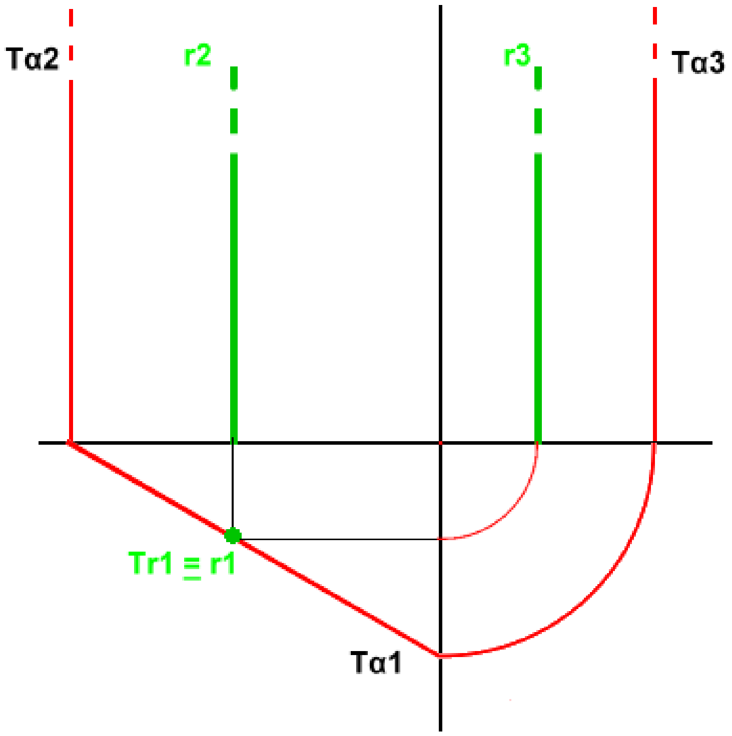
Tr1≡r1

questo perché la retta è perpendicolare al PO così come **α**, infatti

$r \in \alpha$

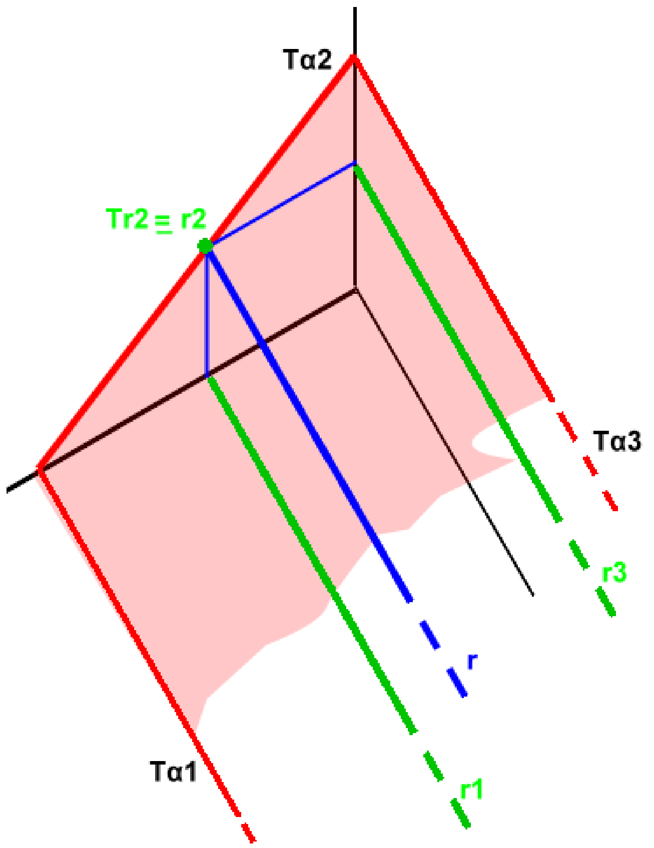
la retta appartiene al piano che abbiamo detto essere ortogonale al PO. Il simbolo della coincidenza degli elementi geometrici corrisponde a tre lineette orizzontali sovrapposte; Tr1 coincide con r1 **Tr1≡r1**. La proiezione di r sul PO è necessariamente un punto che nell'immagine è indicato con un dischetto verde. Dello stesso colore sono le proiezioni di r sul PV e sul PL, che prendono rispettivamente i nomi di ***r2*** ed ***r3***.

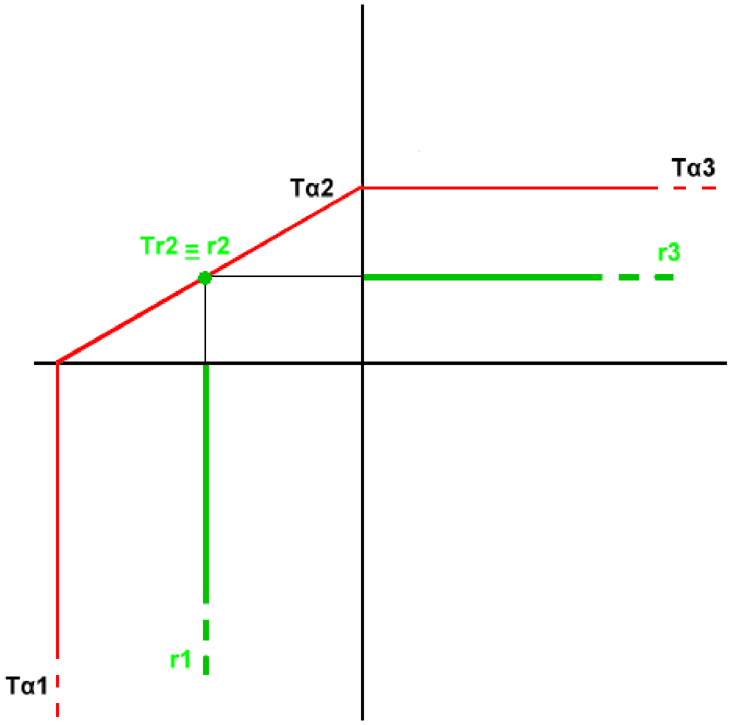
Vediamo le proiezioni ortogonali della retta in questione:



Δ - 2. Retta r ⊥ al PV ed ∈ al piano α anch'esso ⊥ al PV ed inclinato ai restanti piani.

Nel prossimo disegno il piano α è perpendicolare al PV ed inclinato ai restanti piani. La retta r appartiene al piano α ed posizionata perpendicolarmente rispetto alla traccia Tα2.



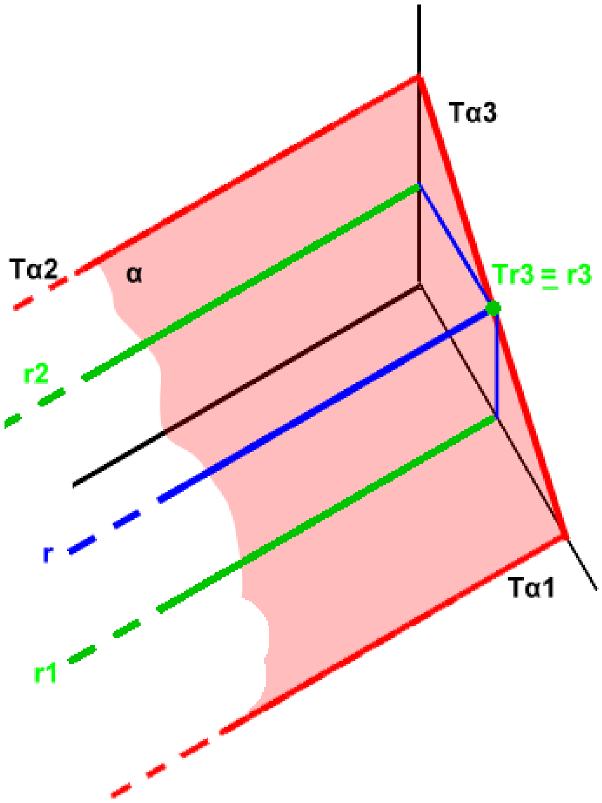


Anche in questa figura possiamo notare che la retta di colore blu indicata con la retta r è perpendicolare alla traccia, questa volta la Tα2. La retta crea con la traccia di α una sua propria traccia che si chiama ***Tr2*** ossia ***T***raccia di ***r***etta col piano ***2*** (il piano 2 è sempre il piano verticale).

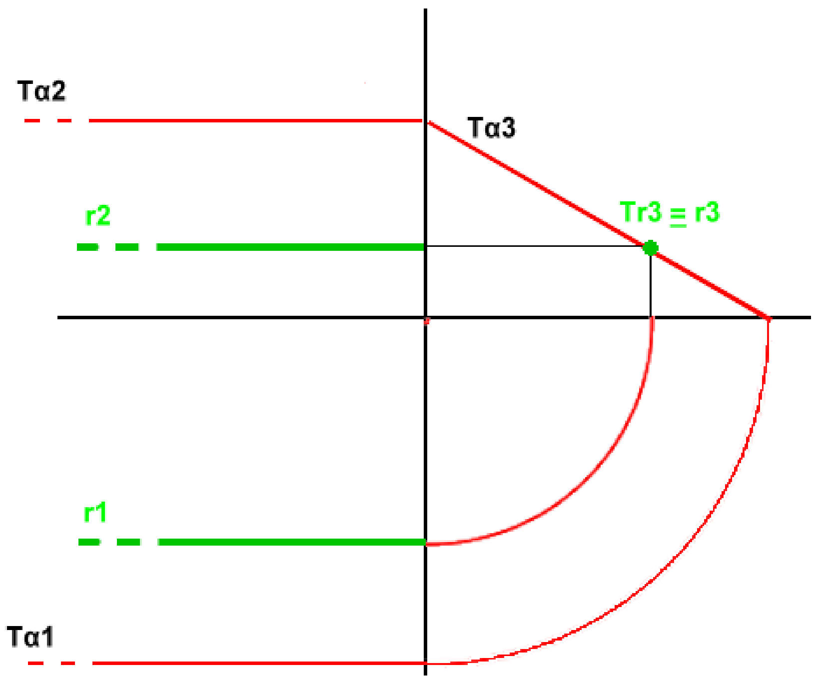
La traccia ***Tr2*** coincide con la proiezione della retta sul PV detta ***r2***; questo perché la retta è perpendicolare al PV, infatti appartiene al piano α che abbiamo detto essere ortogonale al PV; quindi Tα2 coincide con r2. La proiezione di r sul PV è anche in questo caso necessariamente un punto che anche in questa immagine è indicato con un dischetto verde. Dello stesso colore so non le proiezioni di r sul PO e sul PL, che prendono rispettivamente i nomi di ***r1*** ed ***r3***.

Δ - 3. Retta r ⊥ al PL ed ∈ al piano α anch'esso ⊥ al PL ed inclinato ai restanti piani

Retta perpendicolare al piano laterale appartenente ad un piano α anch'esso ortogonale al PL e inclinato ai restanti piani

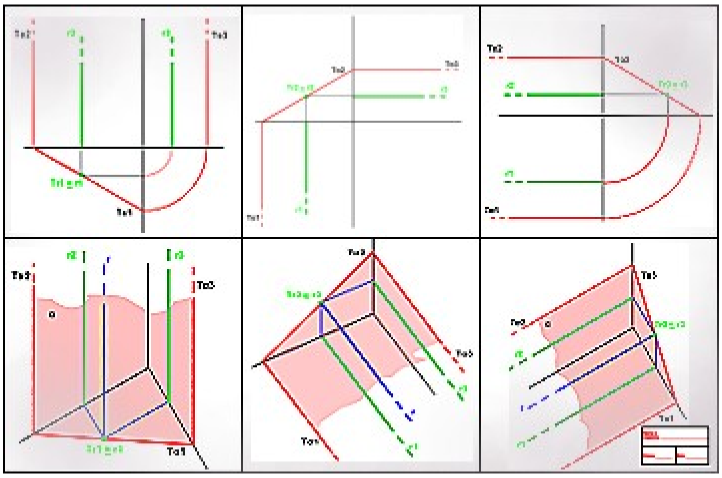


Non commentiamo queste immagini sperando che risultino facili da decodificare ad intuito e a rigore di logica.



Δ - Tavola 4

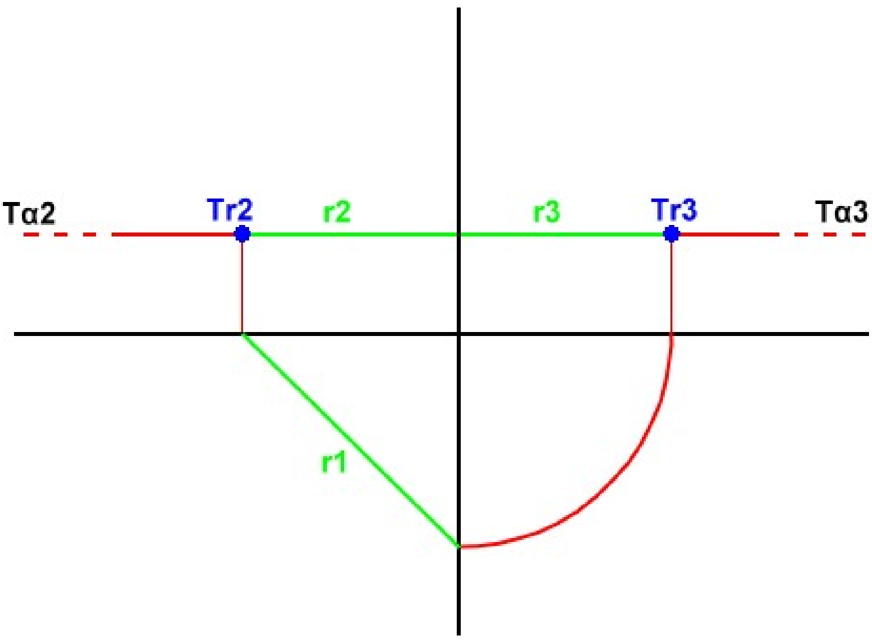
Organizziamo quanto necessario per realizzare la tavola 4.

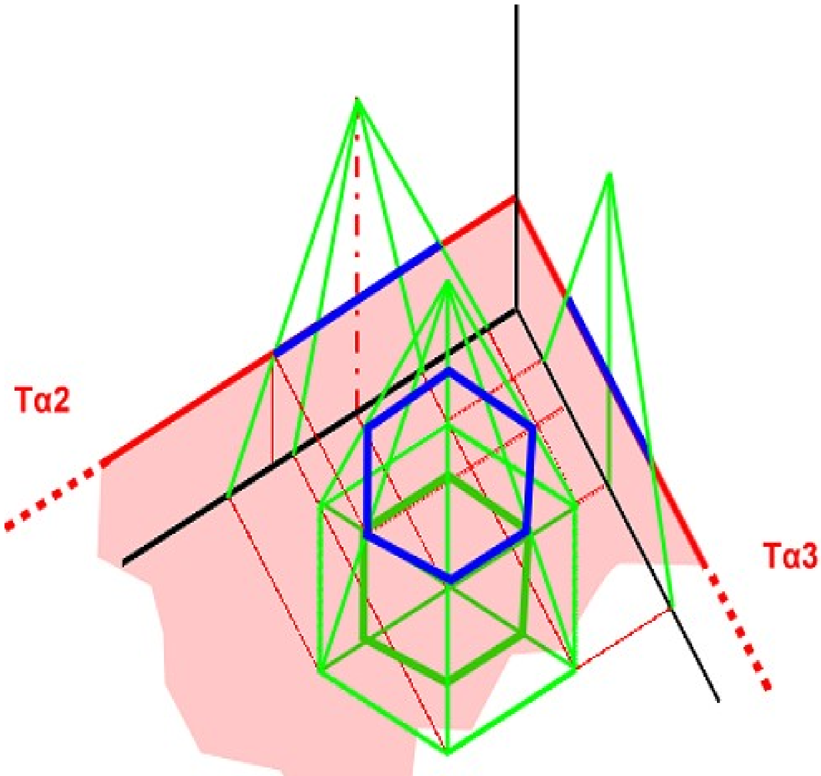


Δ - Rette inclinate appartenenti al piano α nel triedro

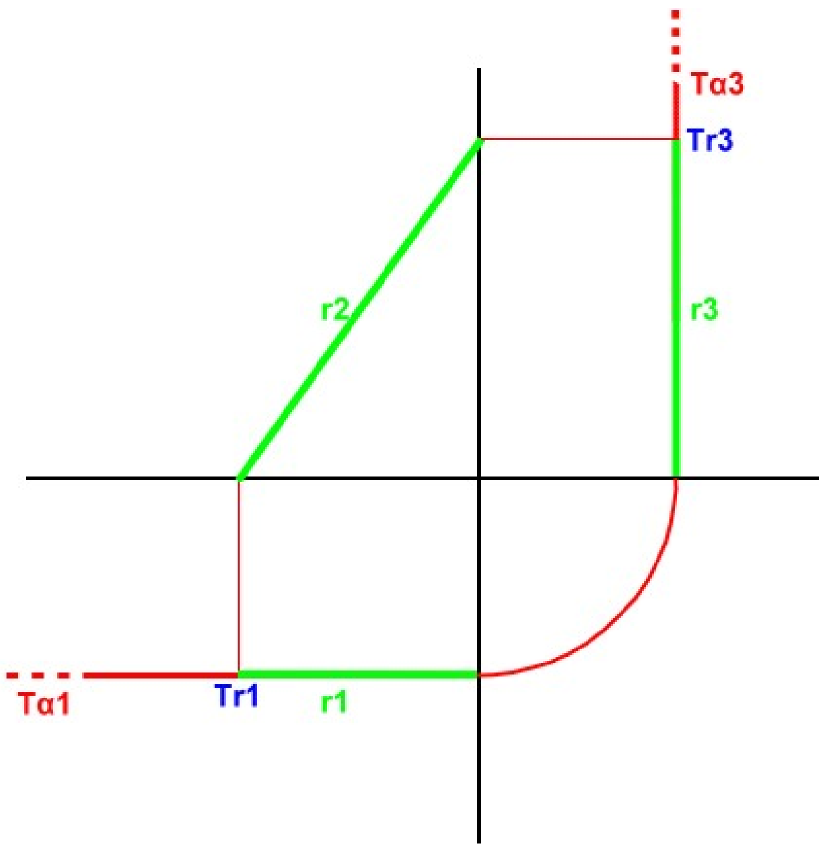
La modalità di costruzione delle proiezioni ortogonali delle rette inclinate è simile alle precedenti. Come abbiamo già visto in precedenza, questo tipo di retta ha due tracce che cadono sulle tracce del piano α ai quali è incidente. Due proiezioni della retta cadranno sulle rispettive tracce di α sia nel caso che il nostro piano sia parallelo ad uno del triedro sia che resti perpendicolare ad uno ed inclinato ai restanti due.

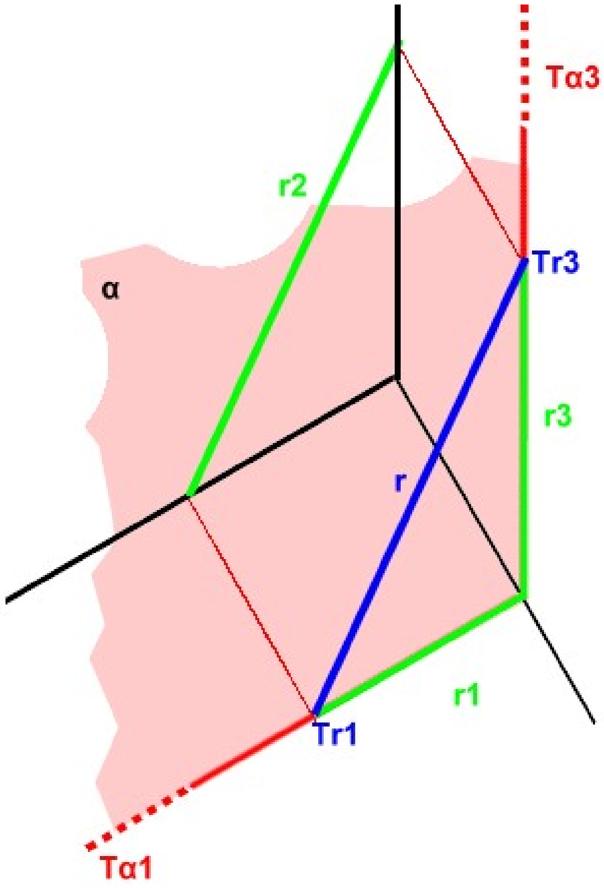
Δ - 1. Retta inclinata ∈ al piano α // al PO



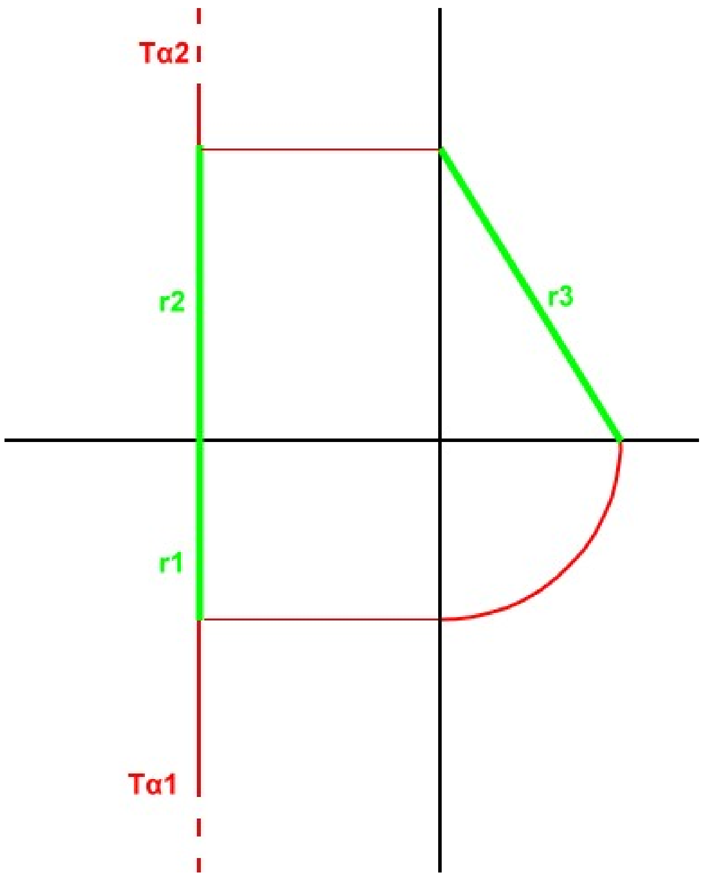


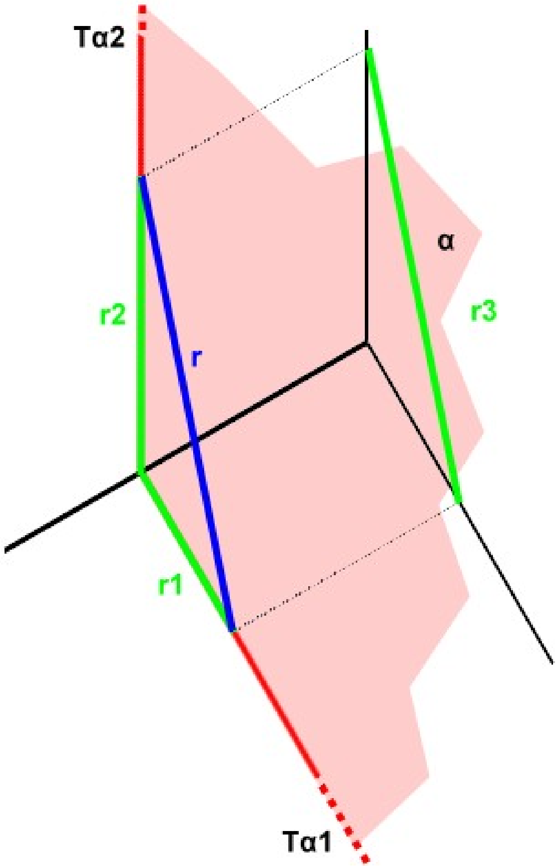
Δ - 2. Retta inclinata ∈ al piano α // al PV



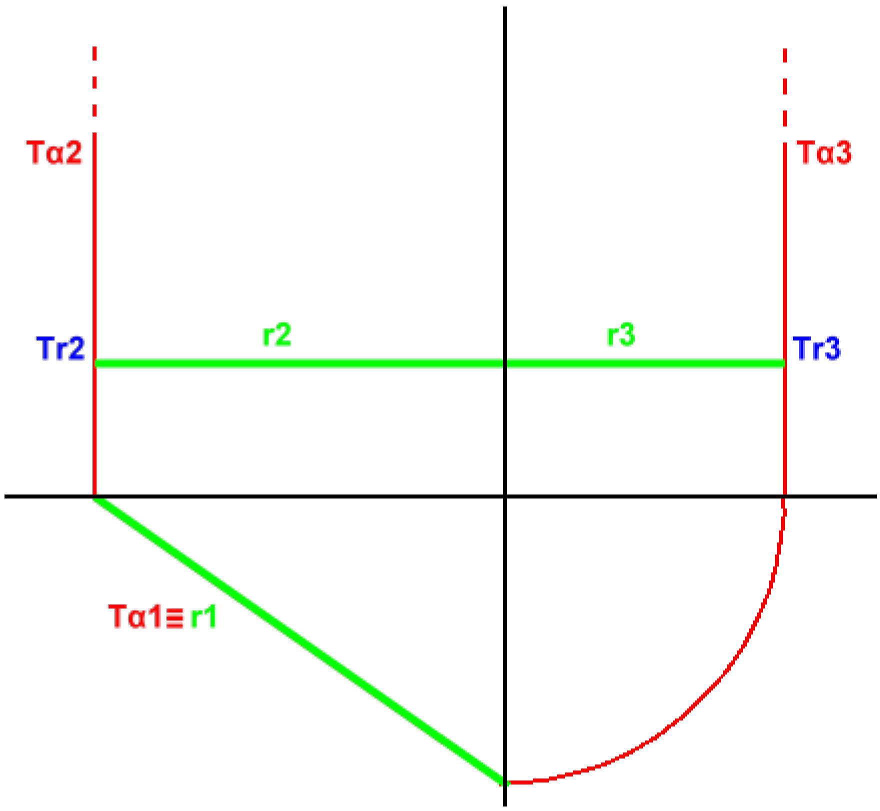


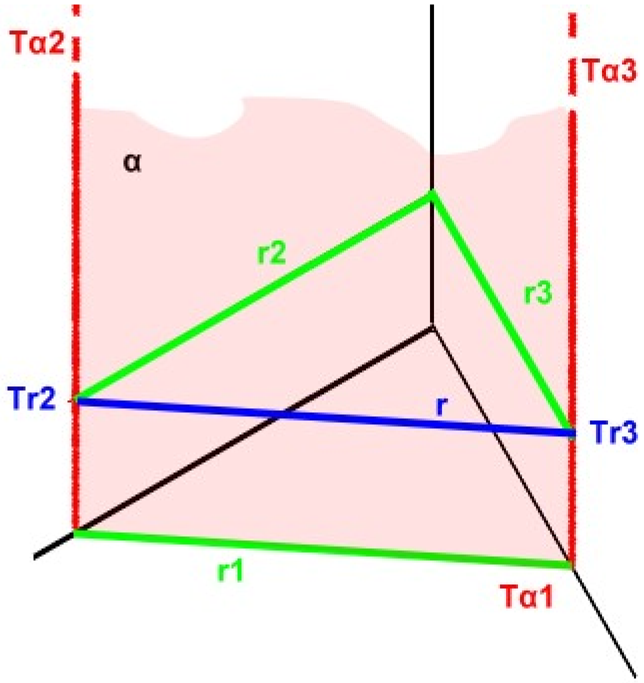
Δ - 3. Retta inclinata ∈ al piano α // al PL



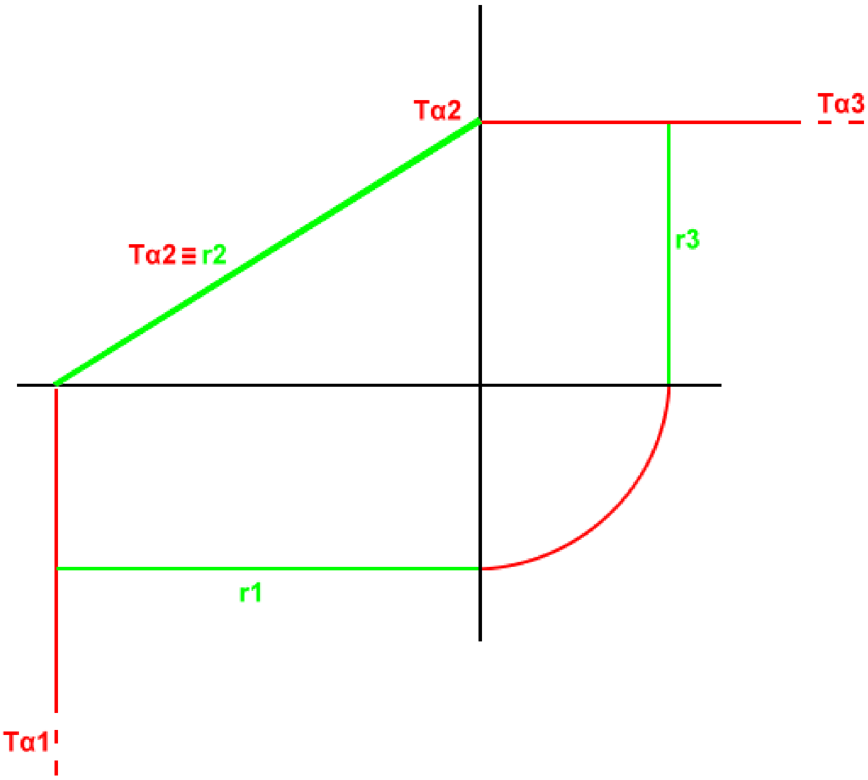


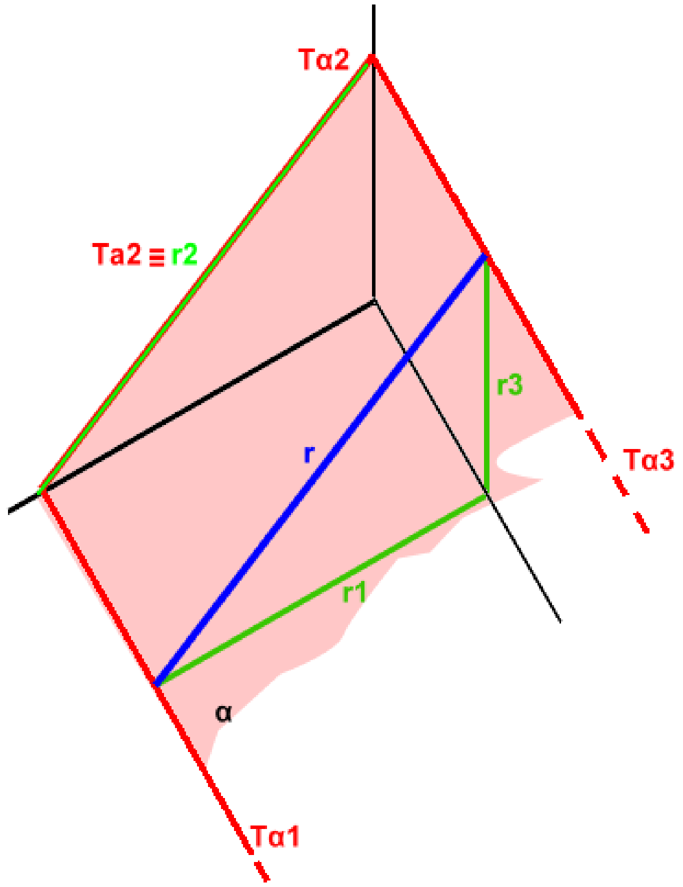
Δ - 4. Retta inclinata ∈ al piano α ⊥ al PO ed inclinato ai restanti piani



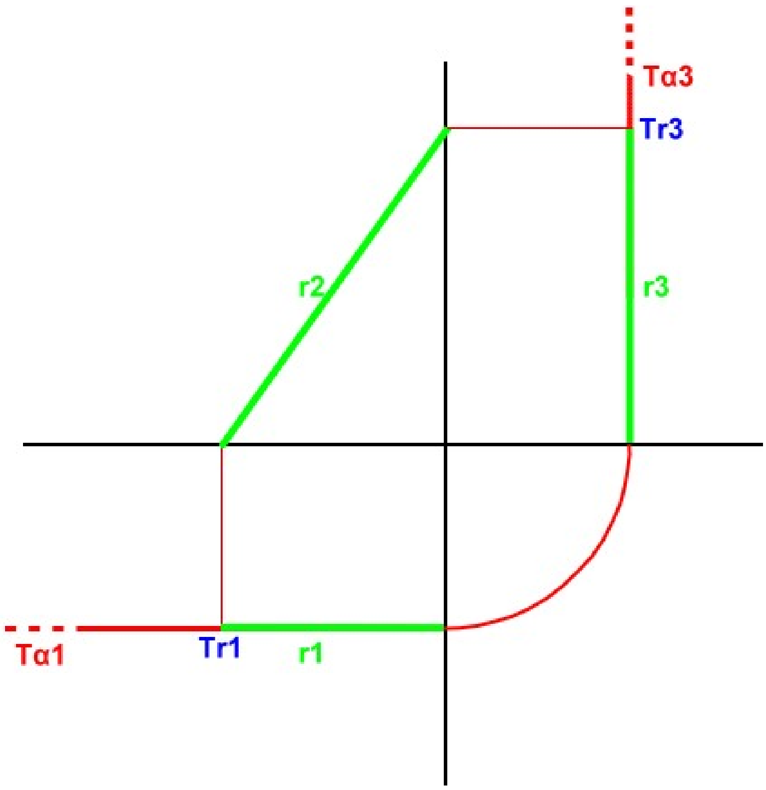


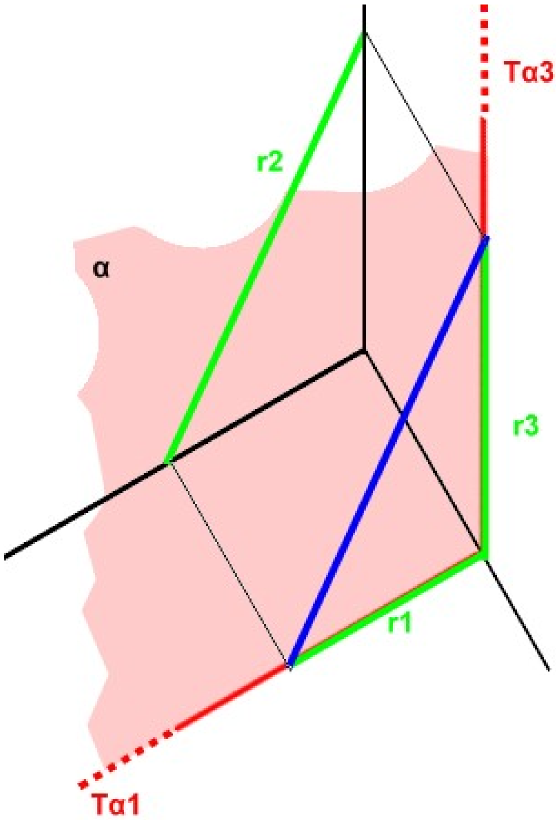
Δ - 5. Retta inclinata ∈ al piano α ⊥ al PV ed inclinato ai restanti piani



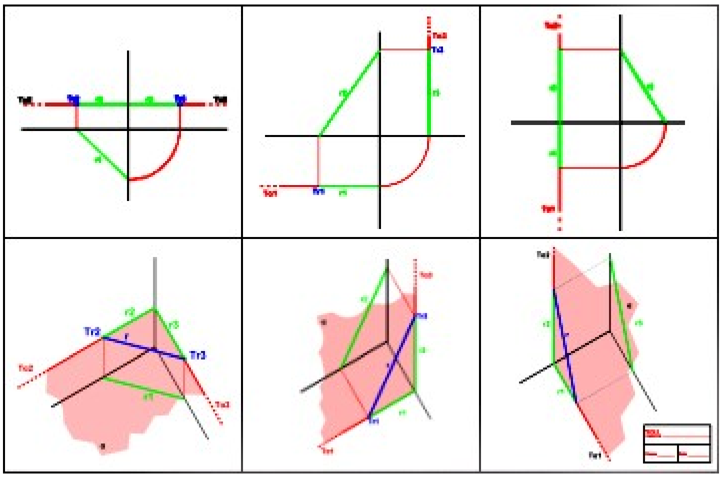


Δ - 6. Retta inclinata ∈ al piano α ⊥ al PL ed inclinato ai restanti piani

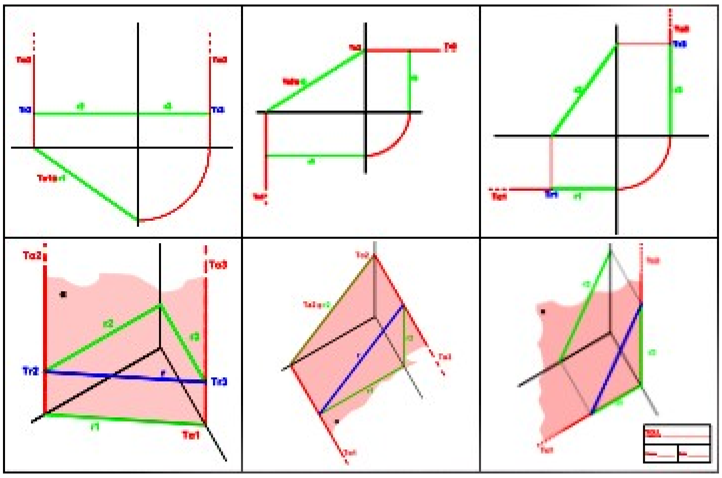




Δ - Tavola 5



Δ - Tavola 6



Δ - Poligoni regolari appartenenti a piani

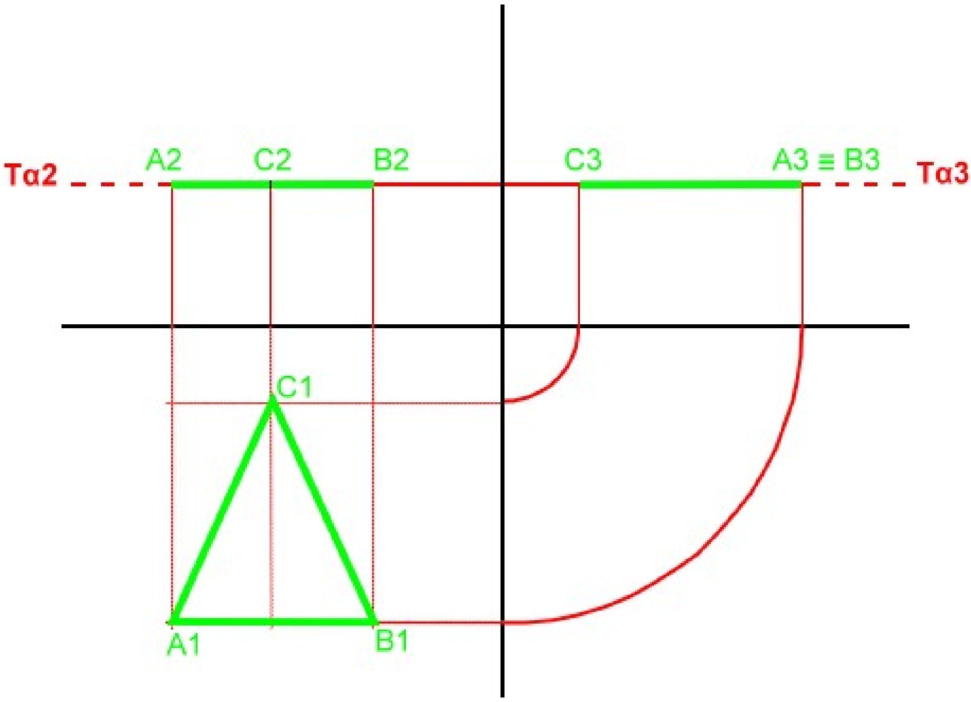
Anche in questa sezione ci occuperemo dei sei tipi di piano che abbiamo visto sino ad ora:

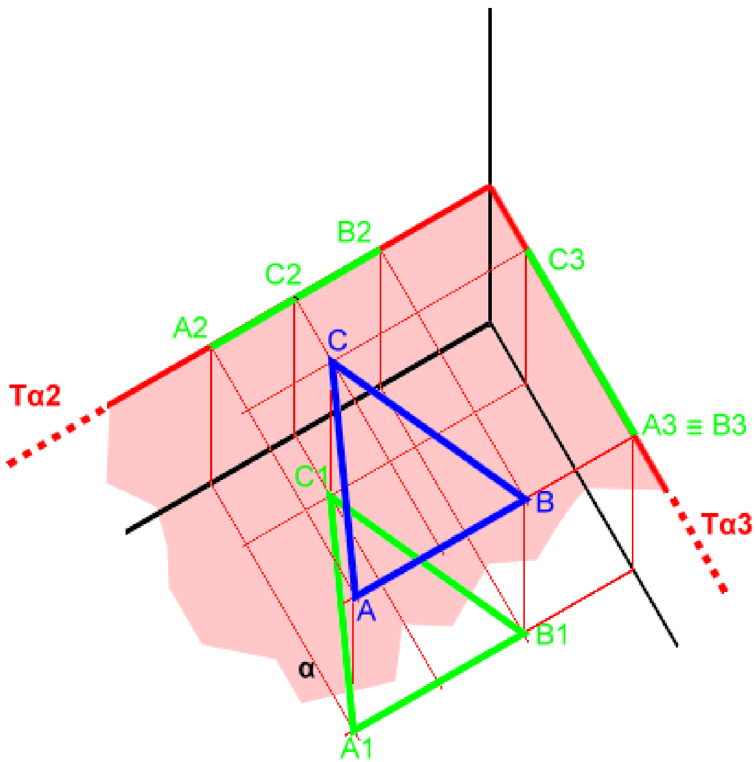
1. Piano α parallelo al PO
2. Piano α parallelo al PV
3. Piano α parallelo al PL
4. Piano α perpendicolare al PO ed inclinato ai restanti piani
5. Piano α perpendicolare al PV ed inclinato ai restanti piani
6. Piano α perpendicolare al PL ed inclinato ai restanti piani

Nei primi tre casi la particolare posizione dei piani ha come effetto la produzione di una proiezione del poligono che corrisponde nella forma e nella grandezza al poligono stesso in quanto quella proiezione è parallela.

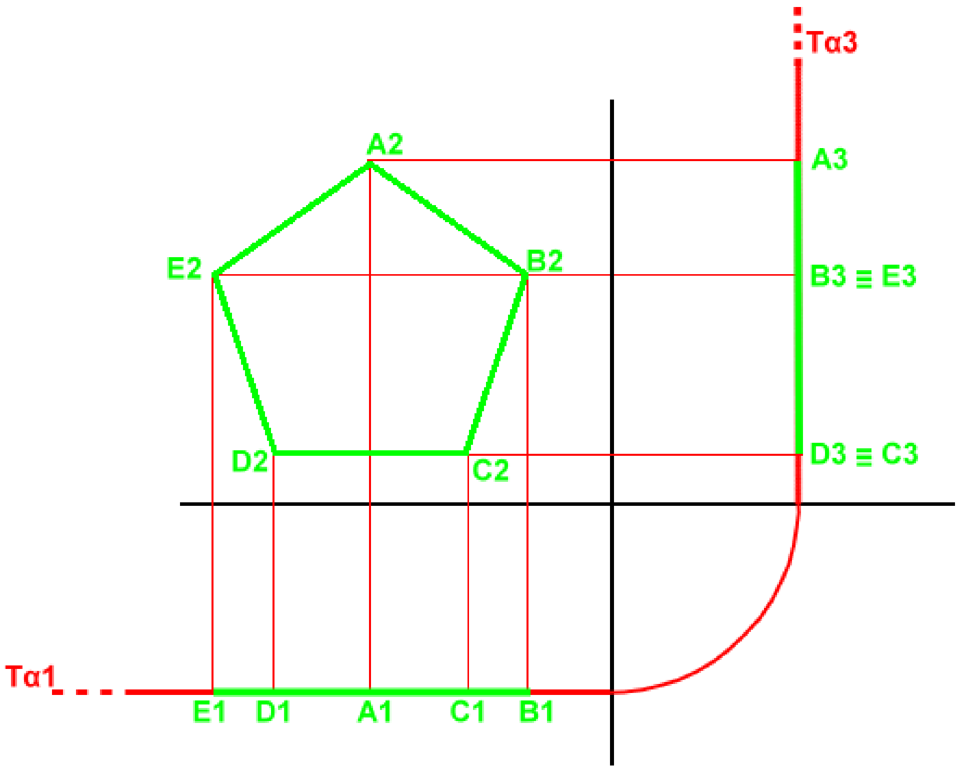
Nelle situazioni 4, 5 e 6 - invece - i poligoni appartenenti ai piani producono proiezioni di grandezza e forma non conformi a quelle del poligono. Per questo motivo è necessario ribaltare il piano di appartenenza dei poligoni per appoggiarlo su uno dei piani del triedro. In questo modo possiamo avere la grandezza e la forma vere dell'oggetto anche nella proiezioni ortogonali. Solitamente i piani si ribaltano lungo la traccia inclinata che è posizionata sul piano del triedro al quale è perpendicolare. Questo non impedisce ribaltamenti lunghe le altre tracce.

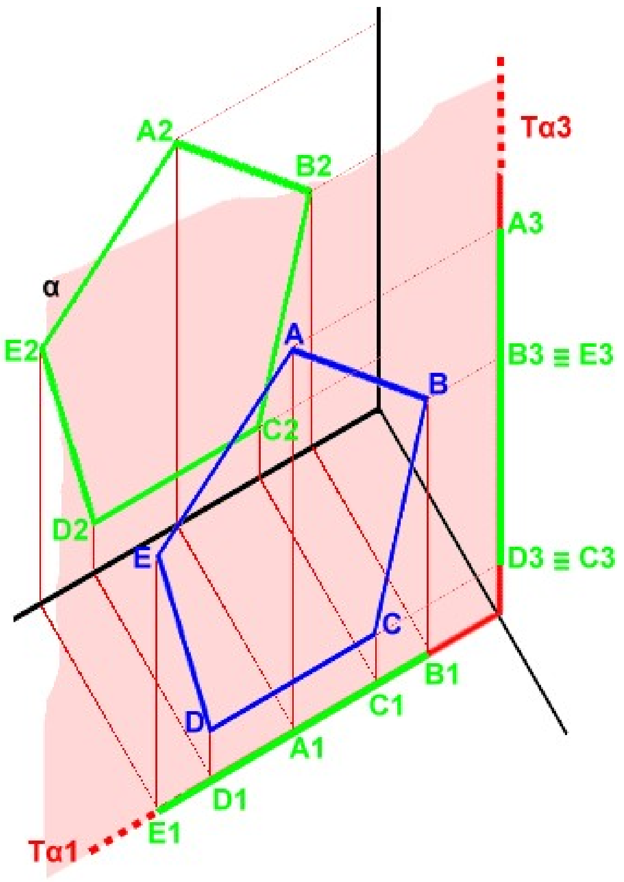
Δ - 1. Proiezioni ortogonali di un triangolo isoscele (misure a piacere) appartenente ad un piano α parallelo al PO



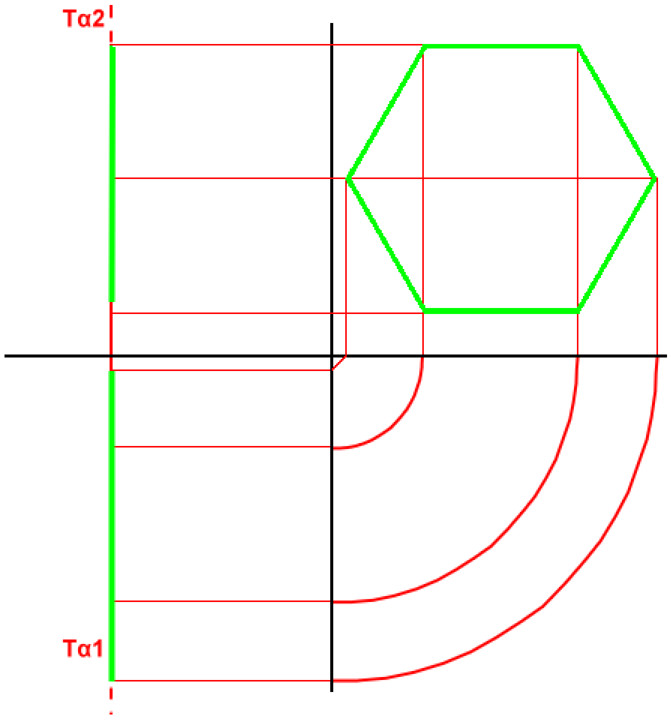


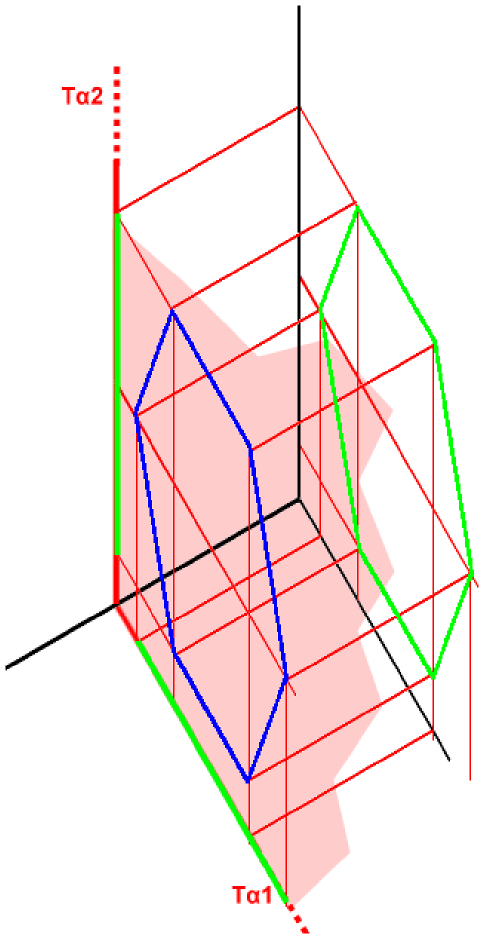
Δ - 2. Proiezioni ortogonali di un pentagono regolare (misure a piacere) appartenente ad un piano α parallelo al PV





Δ - 3. Proiezioni ortogonali di un esagono regolare (misure a piacere) appartenente ad un piano α parallelo al PL





Δ - 4. Proiezioni ortogonali di un ottagono regolare (misure a piacere) appartenente ad un piano α perpendicolare al PO ed inclinato a piacere ai restanti piani

a. Procediamo nel seguente modo:

b. disegniamo gli assi delle proiezioni ortogonali;

c. aggiungiamo le tracce del piano α. Tα1, Tα2 e Tα3; se la traccia contiene indicazioni sull'inclinazione di Tα1 (ad esempio 30° al PV, ovviamente bisogna rispettare le consegne);

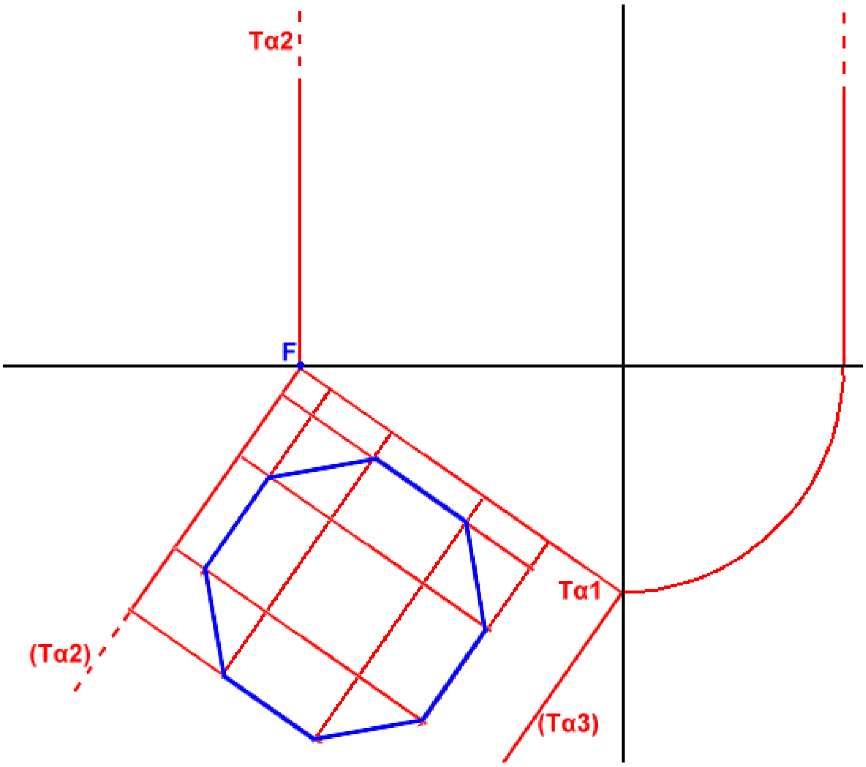
d. Costruiamo la perpendicolare di Tα1 nel punto F; la semiretta che abbiamo creato è la traccia Tα2 ribaltata; solitamente il ribaltamento viene indicato con le parentesi;

e. Costruiamo la traccia che è sul PL ribaltandola sul PO (Tα3); si tratta di tracciare una parallela di (Tα2);

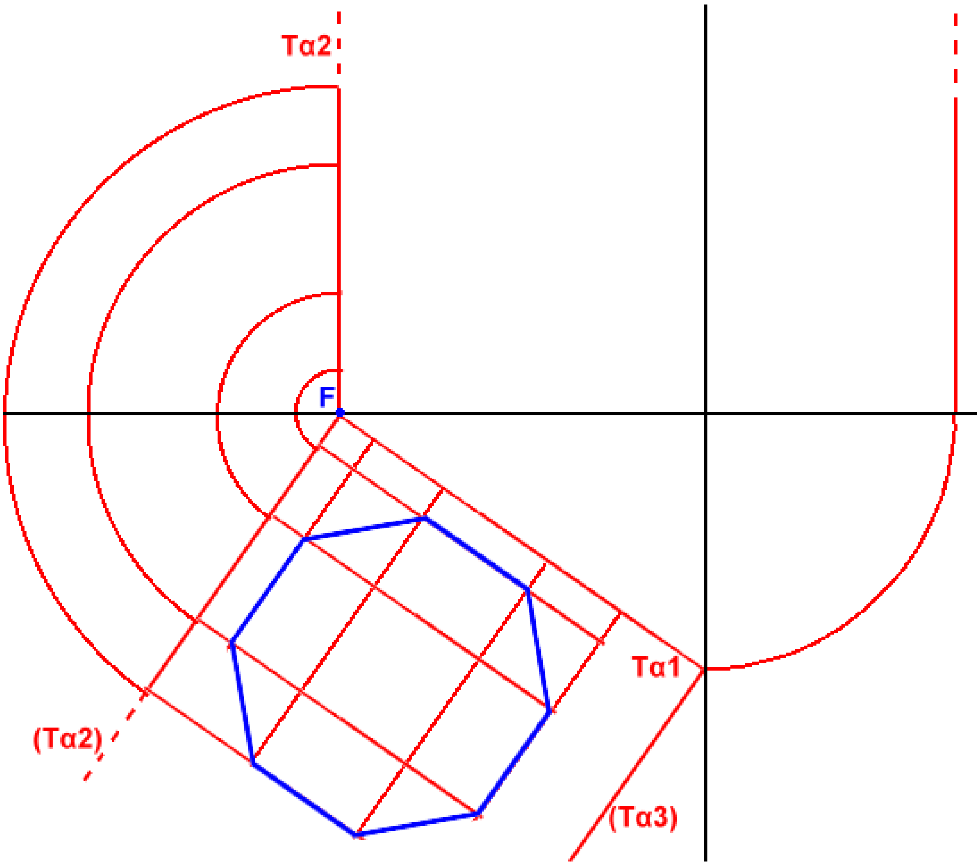
f. Costruiamo un lato dell'ottagono parallelo alla Tα1; se l'ottagono poggia col lato sul PO ovviamente il lato lo costruiamo direttamente sulla Tα1;

g. Costruiamo l'ottagono regolare dato il lato;

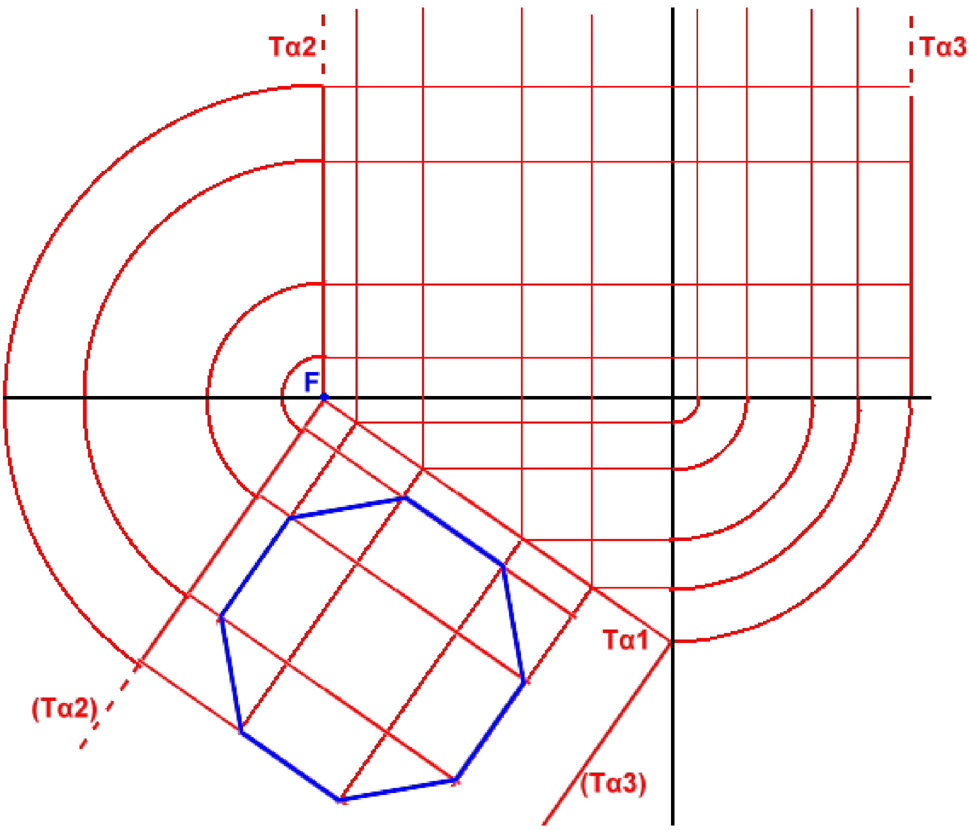
h. Prolunghiamo le rette che individuano i lati dell'ottagono lanciando le parallele e le perpendicolari di Tα1;



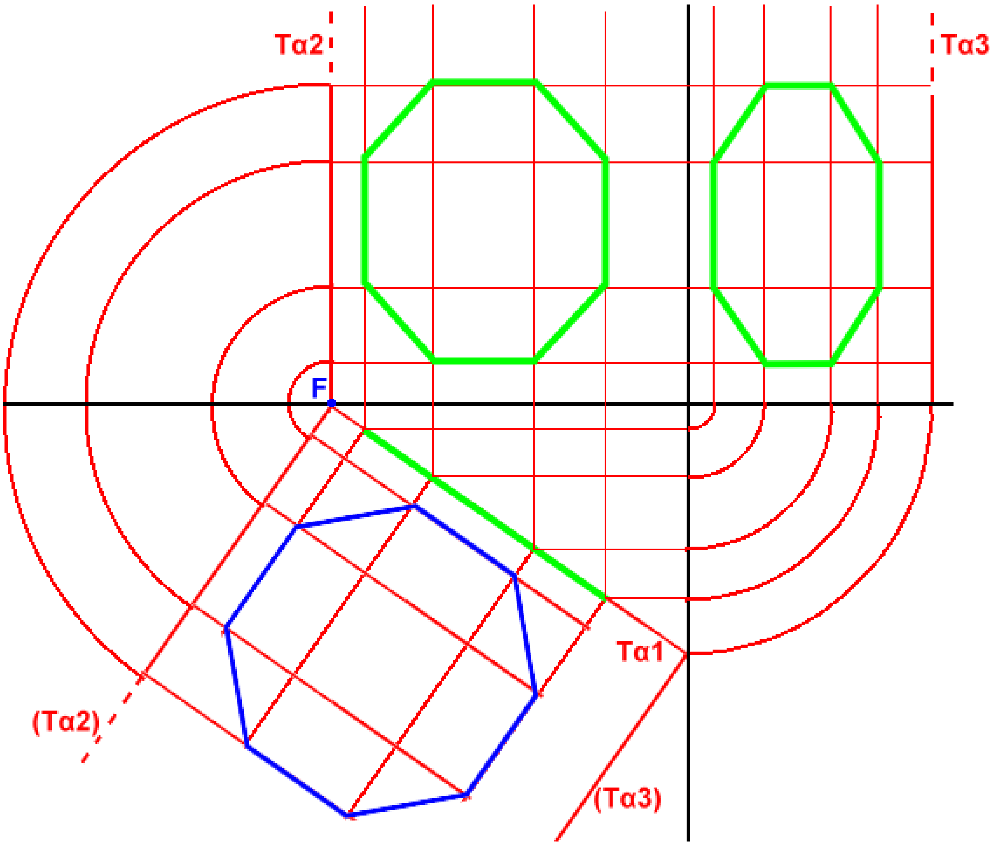
i. Utilizzando il compasso e puntando in F ribaltiamo le tracce delle rette che sono su (Tα2) sino a raggiungere Tα2 (figura successiva);



j. Lanciamo le parallele di LT (ricordiamo che LT è la linea di terra) delle tracce che ora sono su Tα2; lanciamo anche le perpendicolari di LT partendo dalla Tα1; dalle medesime tracce della Tα1 lanciamo anche le parallele di LT e poi le ribaltiamo sino a raggiungere il piano laterale lì dove disegniamo le perpendicolari di LT (figura successiva);



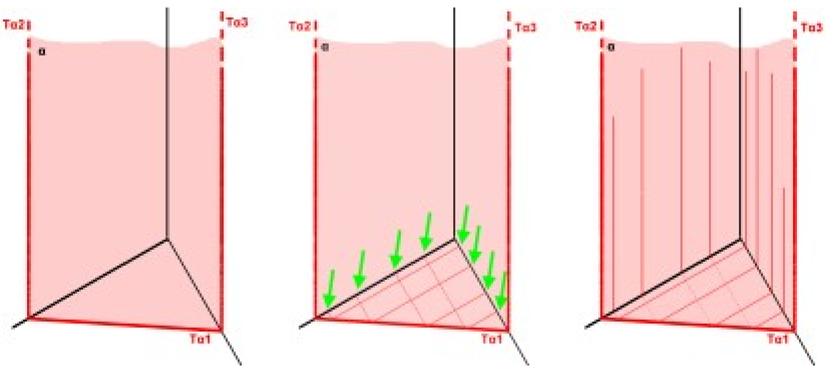
k. Ora non dobbiamo fare altro che individuare le proiezioni ortogonali dell'ottagono regolare che nel prossimo disegno sono di colore verde



Per disegnare l'assonometria utilizziamo il seguente procedimento.

Costruiamo gli assi assonometrici:

a. prendendo le misure dagli assi delle proiezioni ortogonali, individuiamo le tracce del piano ed il piano α;

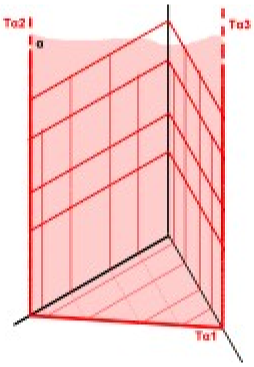


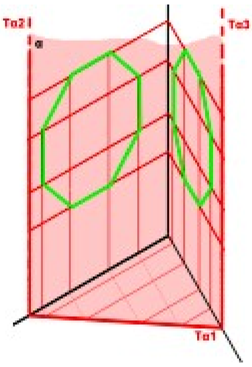
a. b. c.

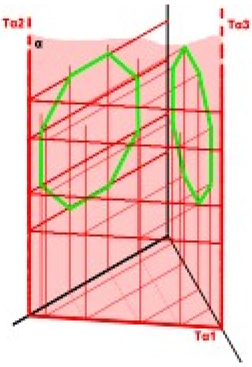
Prendendo le misure sempre dagli assi delle proiezioni ortogonali costruiamo le parallele di X e di Y come da apposita figura b;

ora alziamo le perpendicolari sia sugli assi X ed Y che sulla traccia Tα1;

Prendiamo dall'asse verticale delle proiezioni ortogonali le misure e le riportiamo su Z; poi lanciamo le parallele di X e di Y (figura d.);





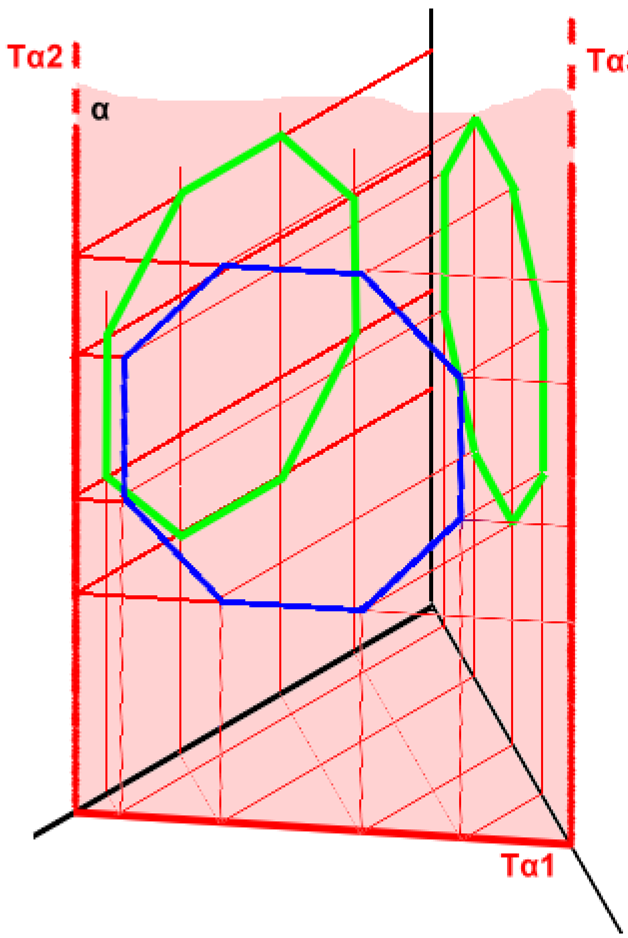


d. e. f.

Individuiamo la proiezione dell'ottagono sulla Tα1;

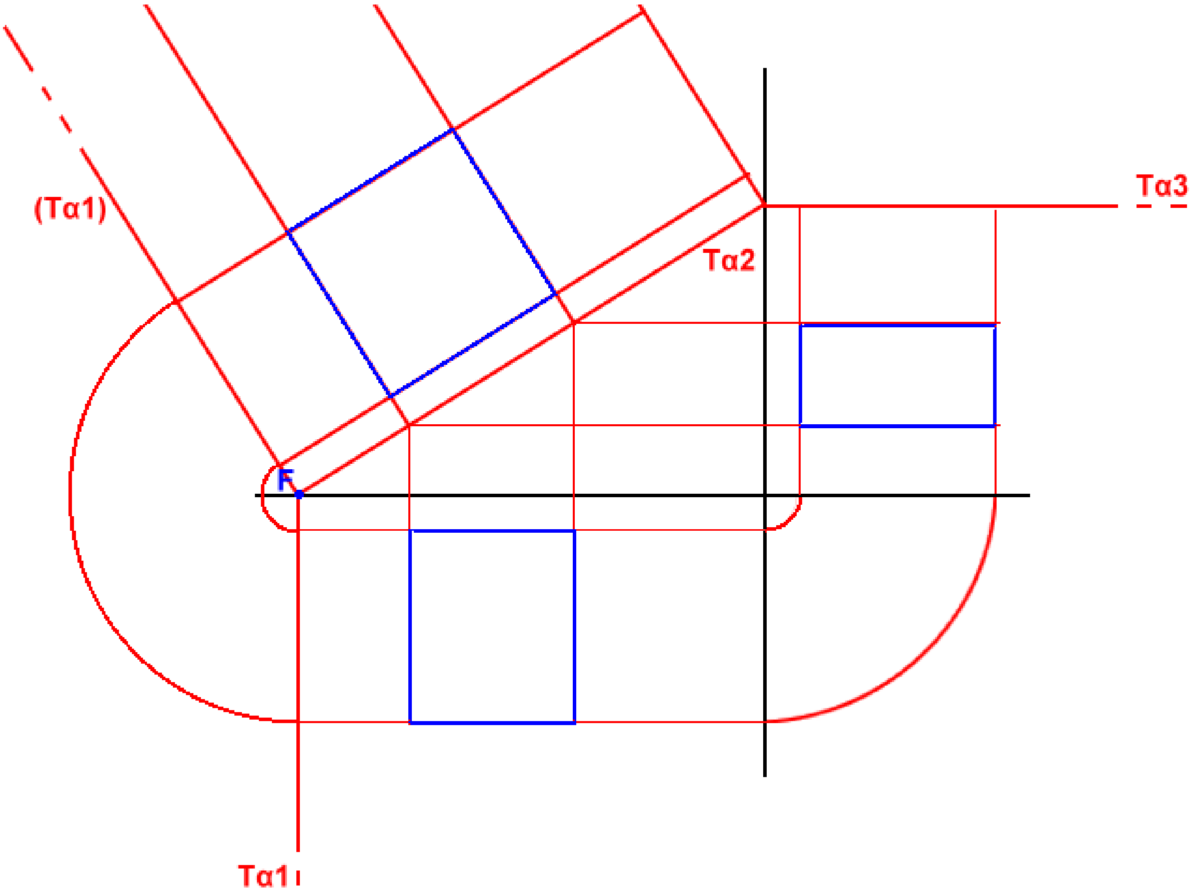
alziamo le perpendicolari parallele di Z sulla Tα1; lanciamo le parallele di Tα1 visibili nella figura f;

infine tracciamo l'ottagono regolare che nelle proiezioni ortogonali è visibile soltanto ribaltato;

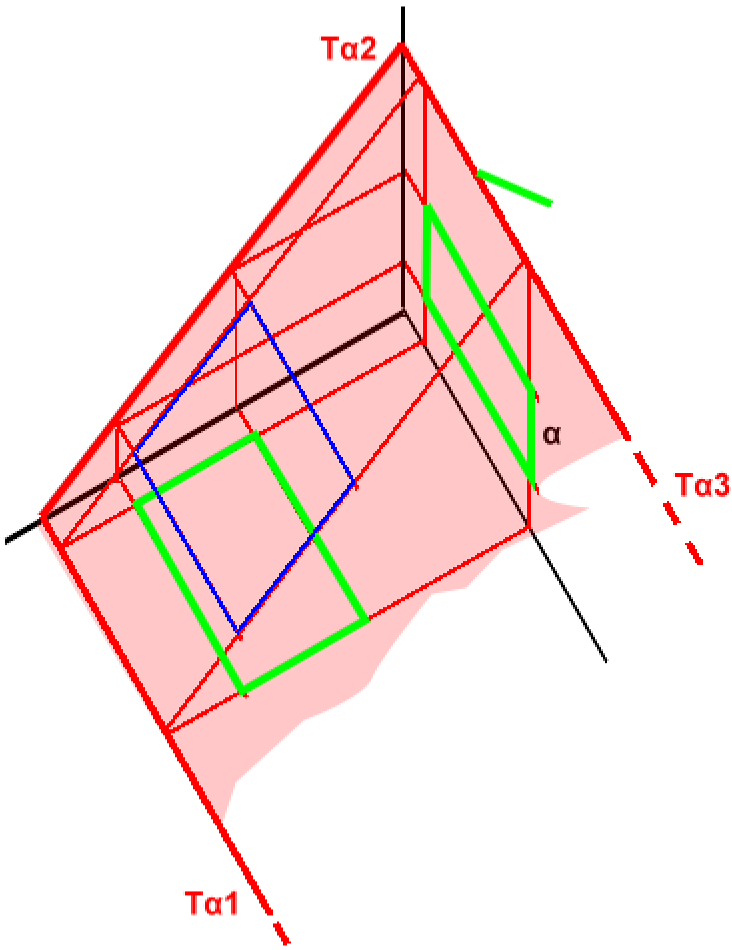


Nella proiezione assonometrica evitiamo di disegnare il piano α ribaltato, le sue tracce e l'ottagono ribaltati.

Δ - 5. Proiezioni ortogonali di un quadrato (misure a piacere) appartenente ad un piano α perpendicolare al PV ed inclinato a piacere ai restanti piani

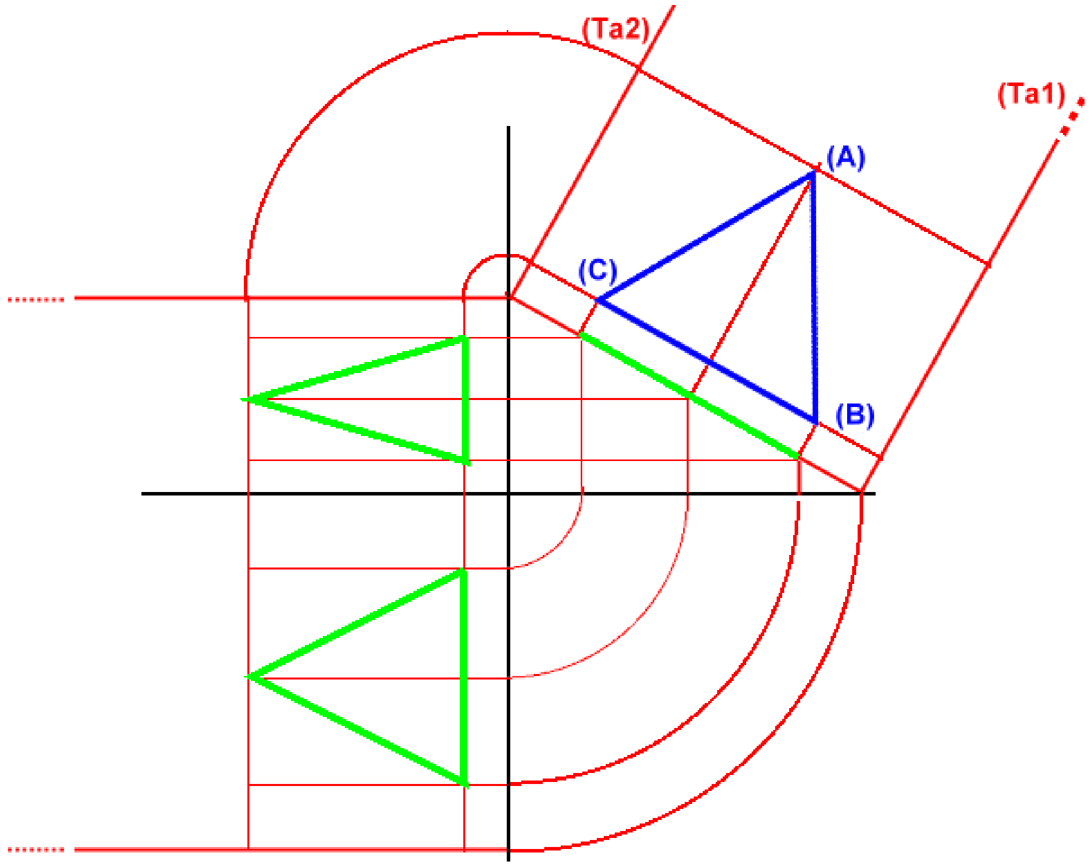


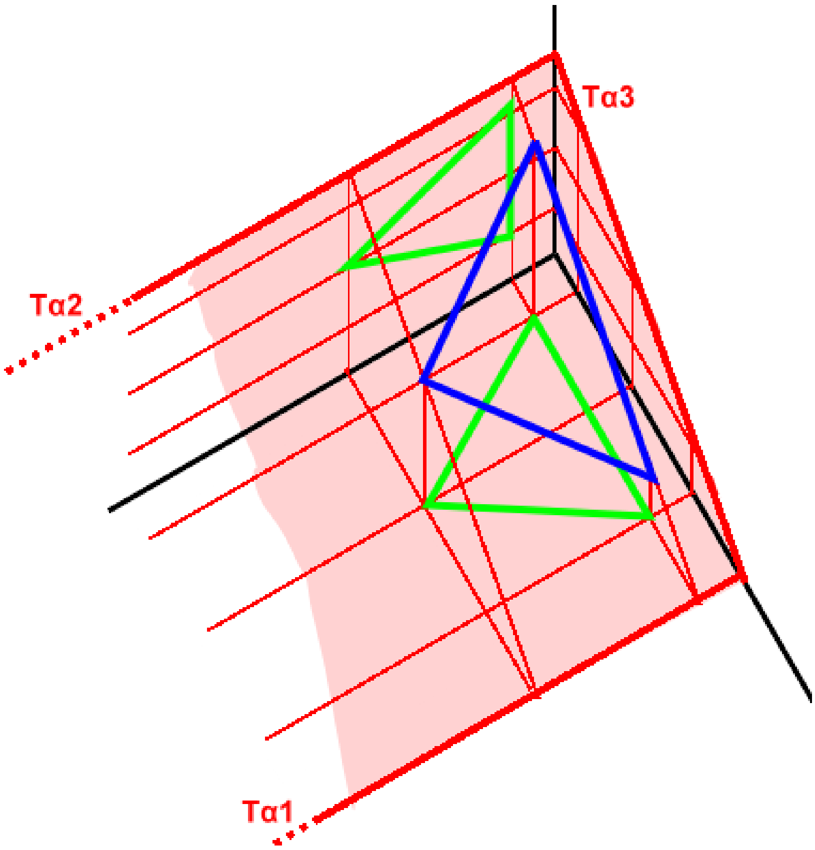
(Tα1)
Tα3
Tα2
F
Tα1



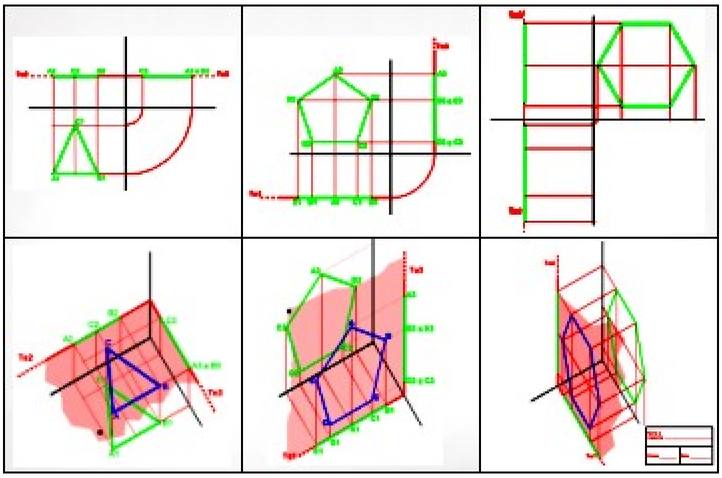
Tα2
α
Tα3
Tα1

Δ - 6. Proiezioni ortogonali di un triangolo equilatero (misure a piacere) appartenente ad un piano α perpendicolare al PL ed inclinato a piacere ai restanti piani

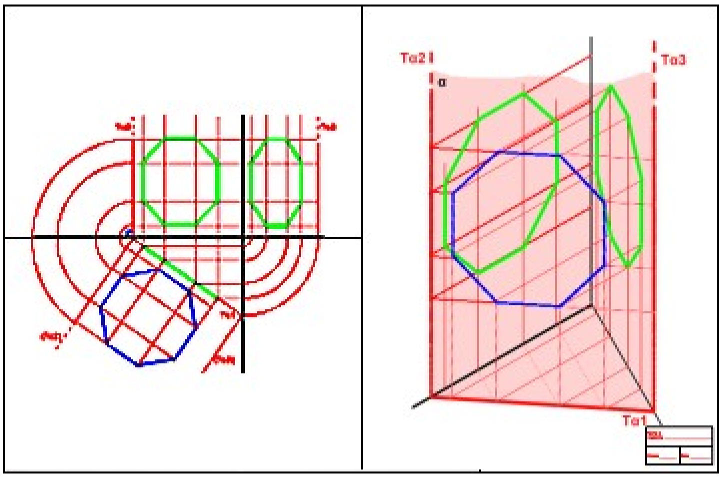




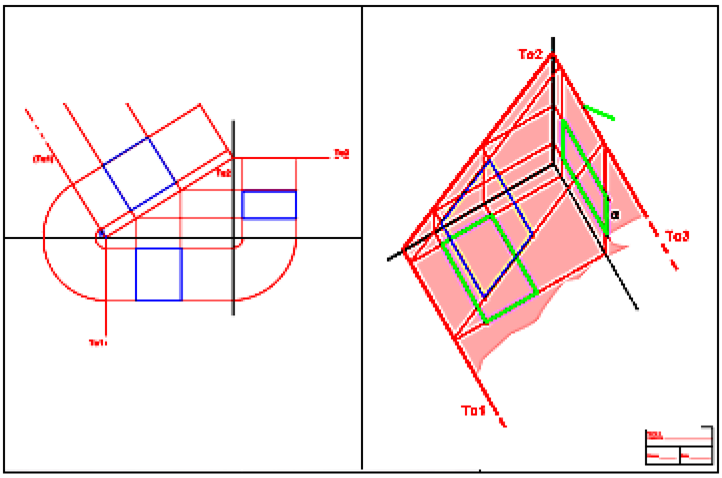
Δ - Tavola 7



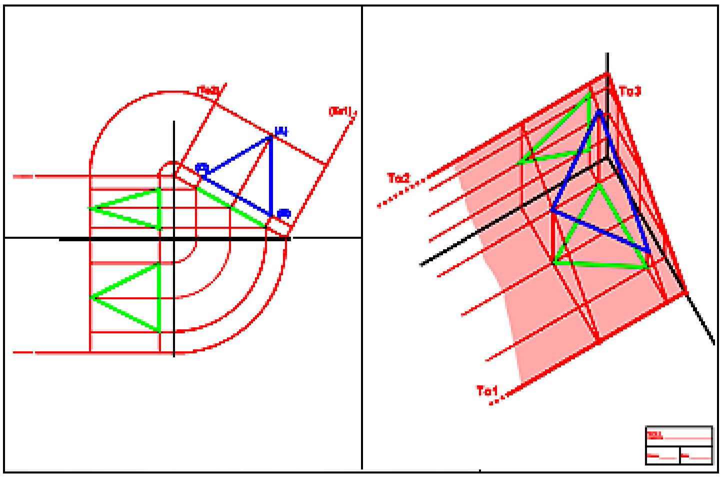
Δ - Tavola 8



Δ - Tavola 9

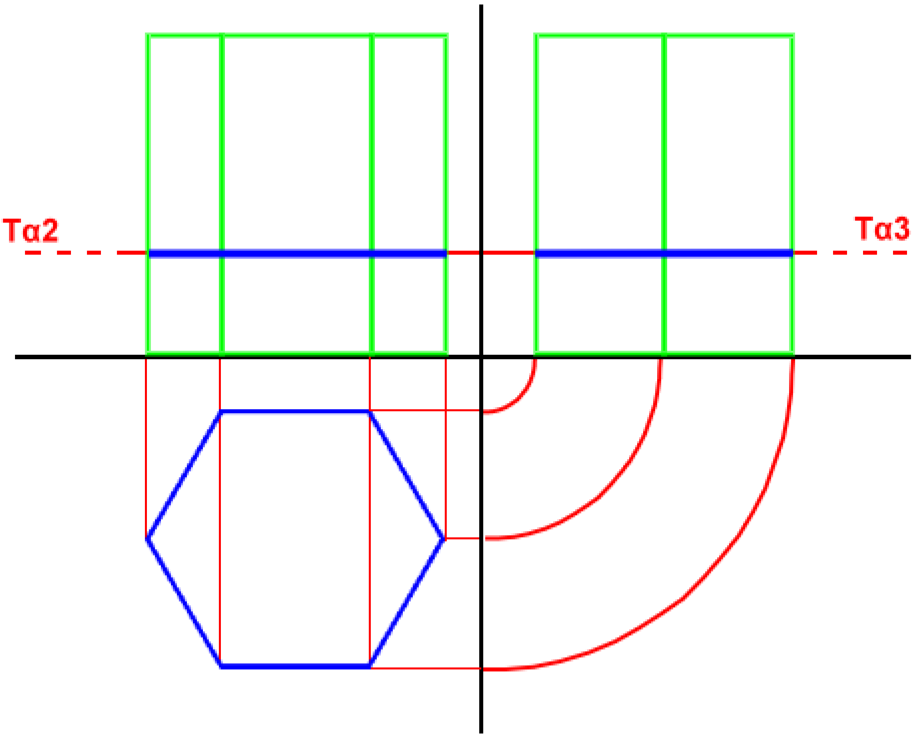


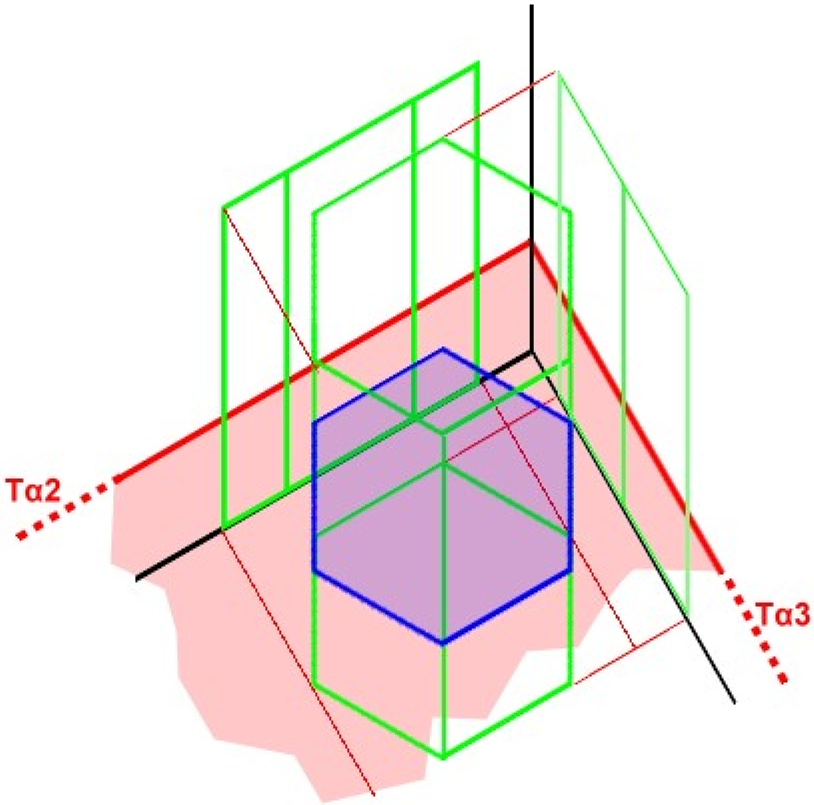
Δ - Tavola 10



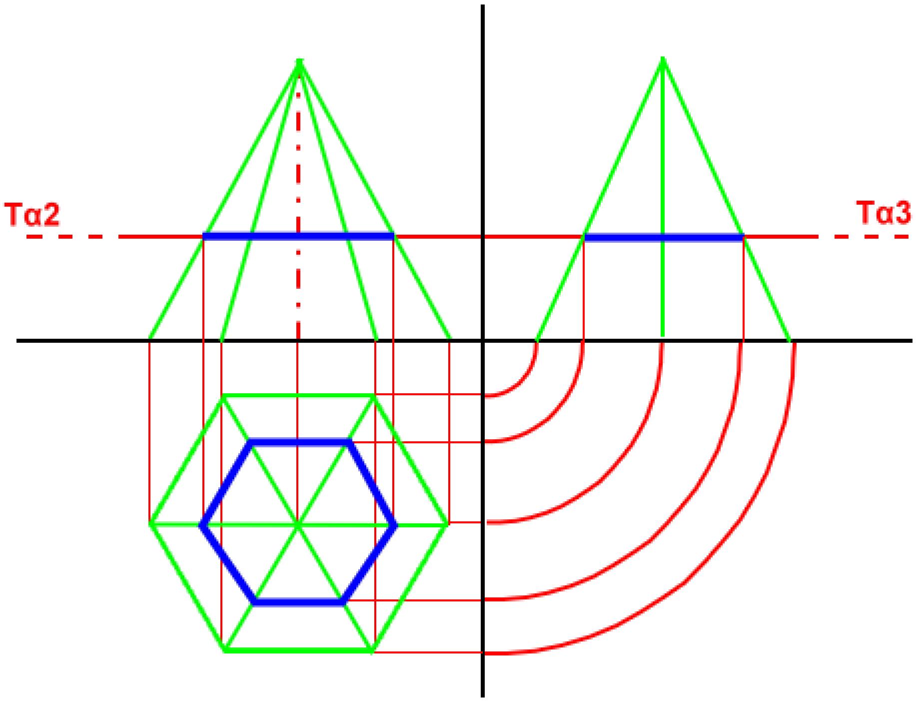
Δ - Sezioni semplici di poliedri

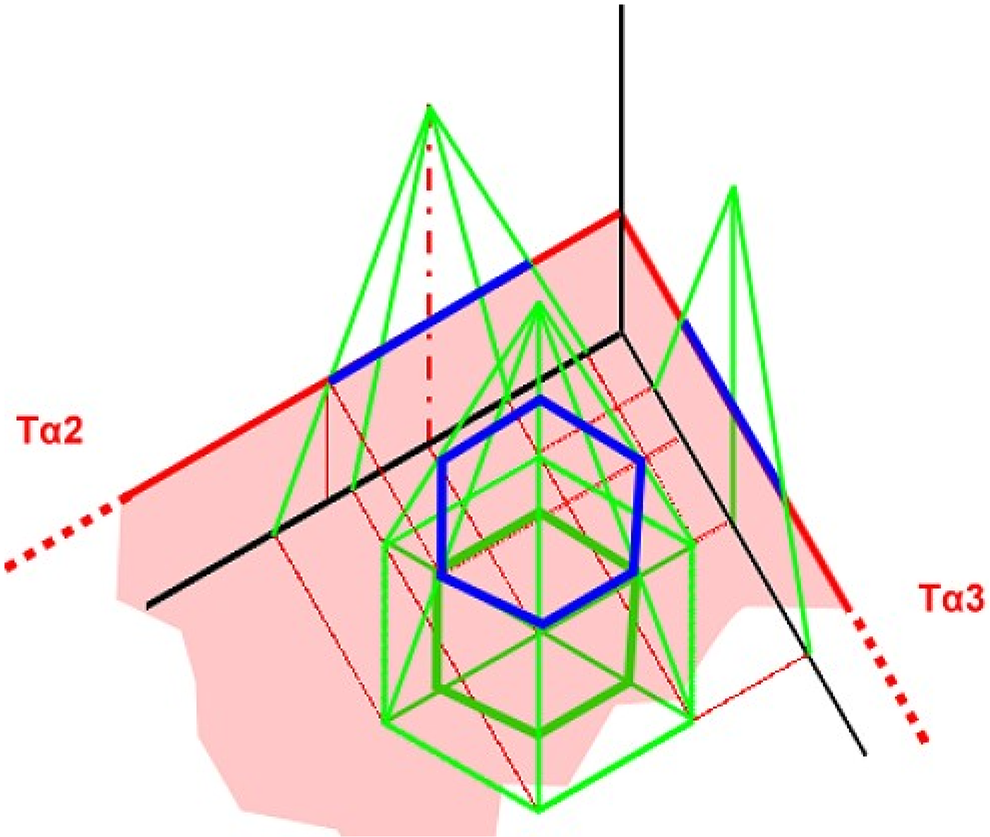
1. Sezione di prisma regolare a base esagonale poggiante sul PO; piano sezionante α parallelo al PO



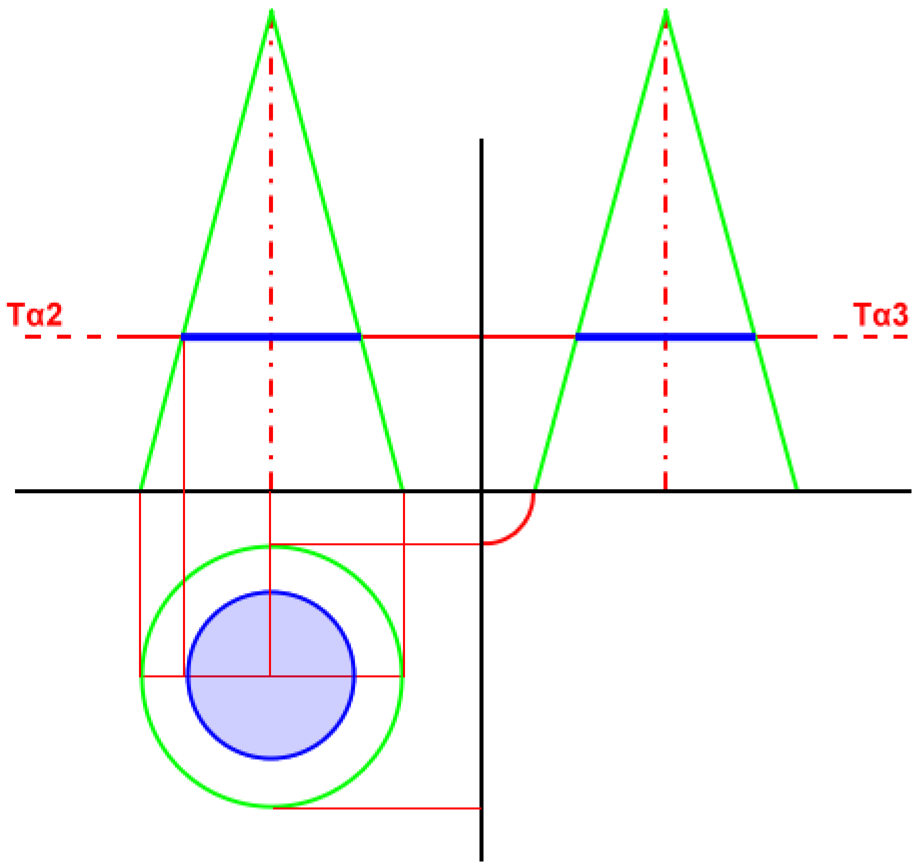


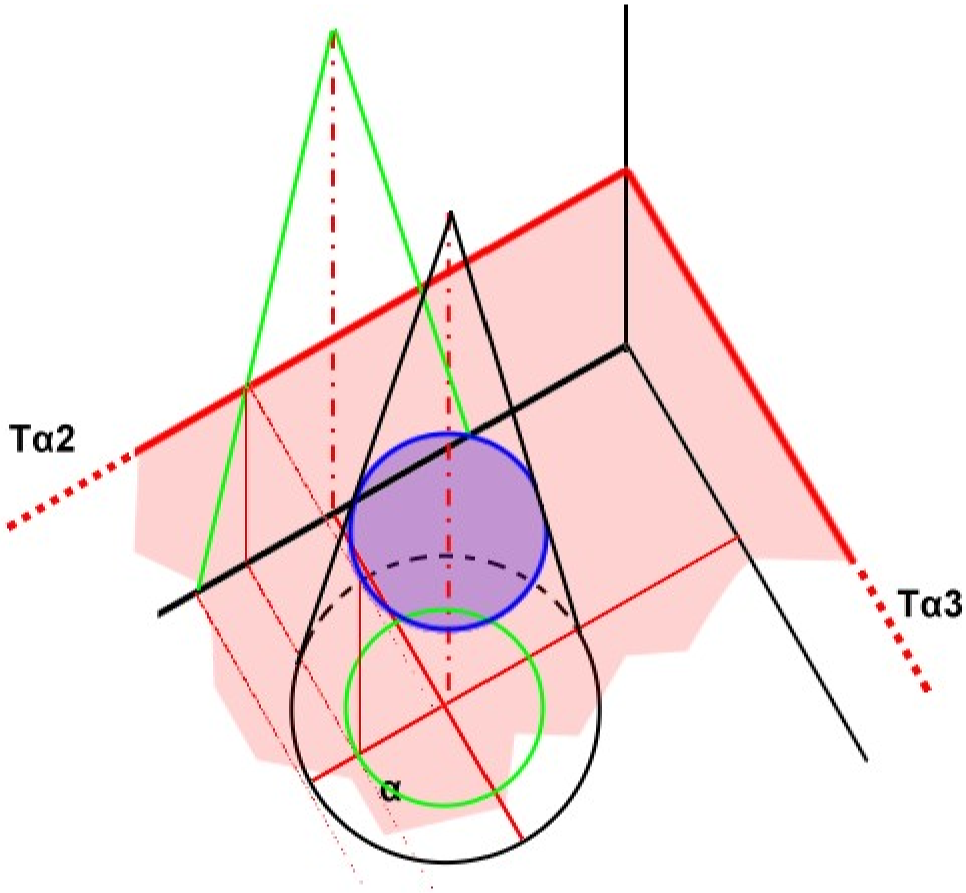
Δ - 2. Sezione di piramide regolare a base esagonale poggiante sul PO; piano sezionante α parallelo al PO



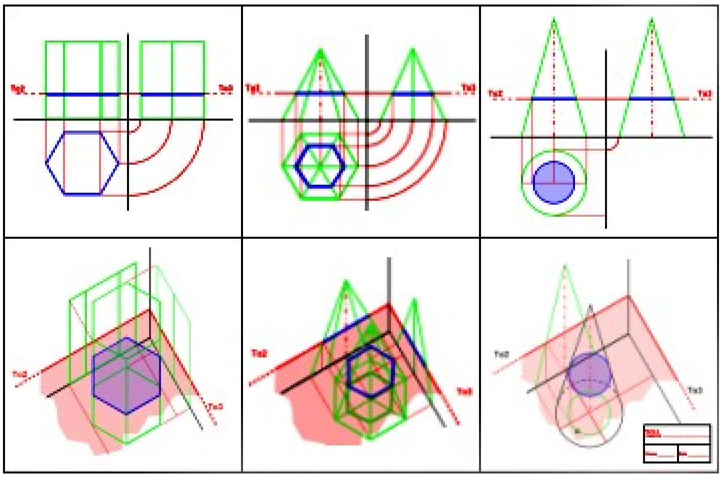


Δ - 3. Sezione di cono regolare poggiante sul PO; piano sezionante α parallelo al PO



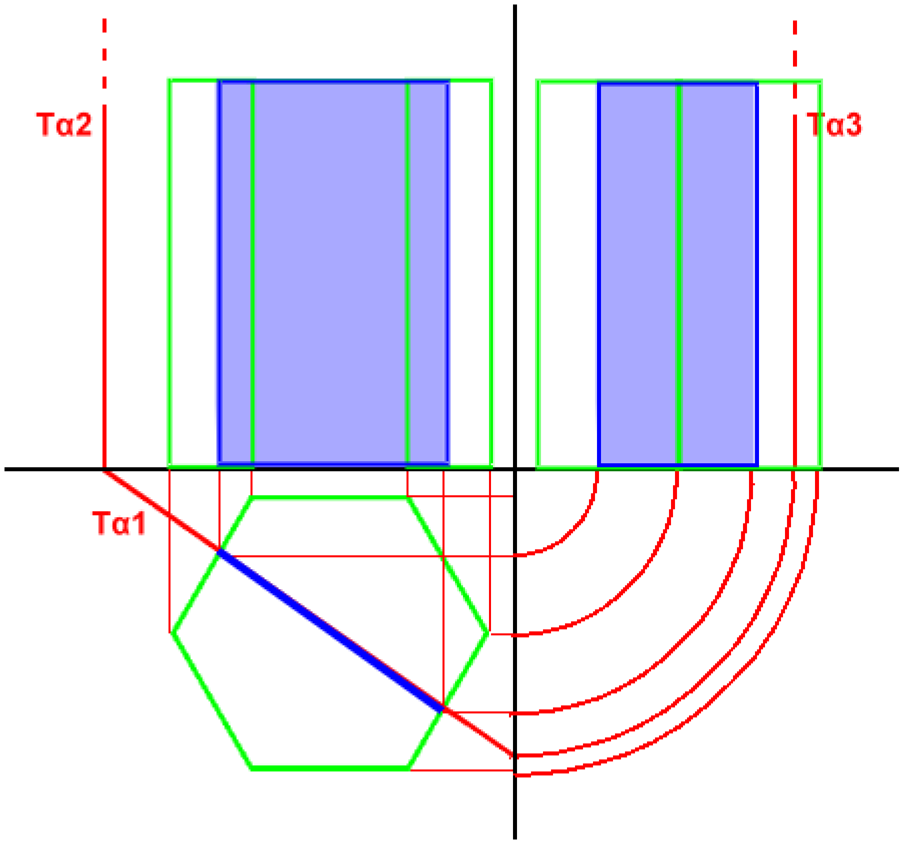


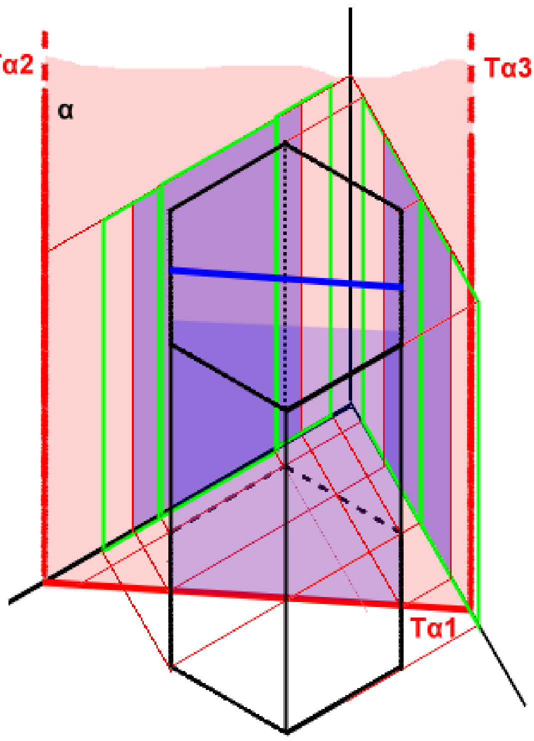
Δ - Tavola 11



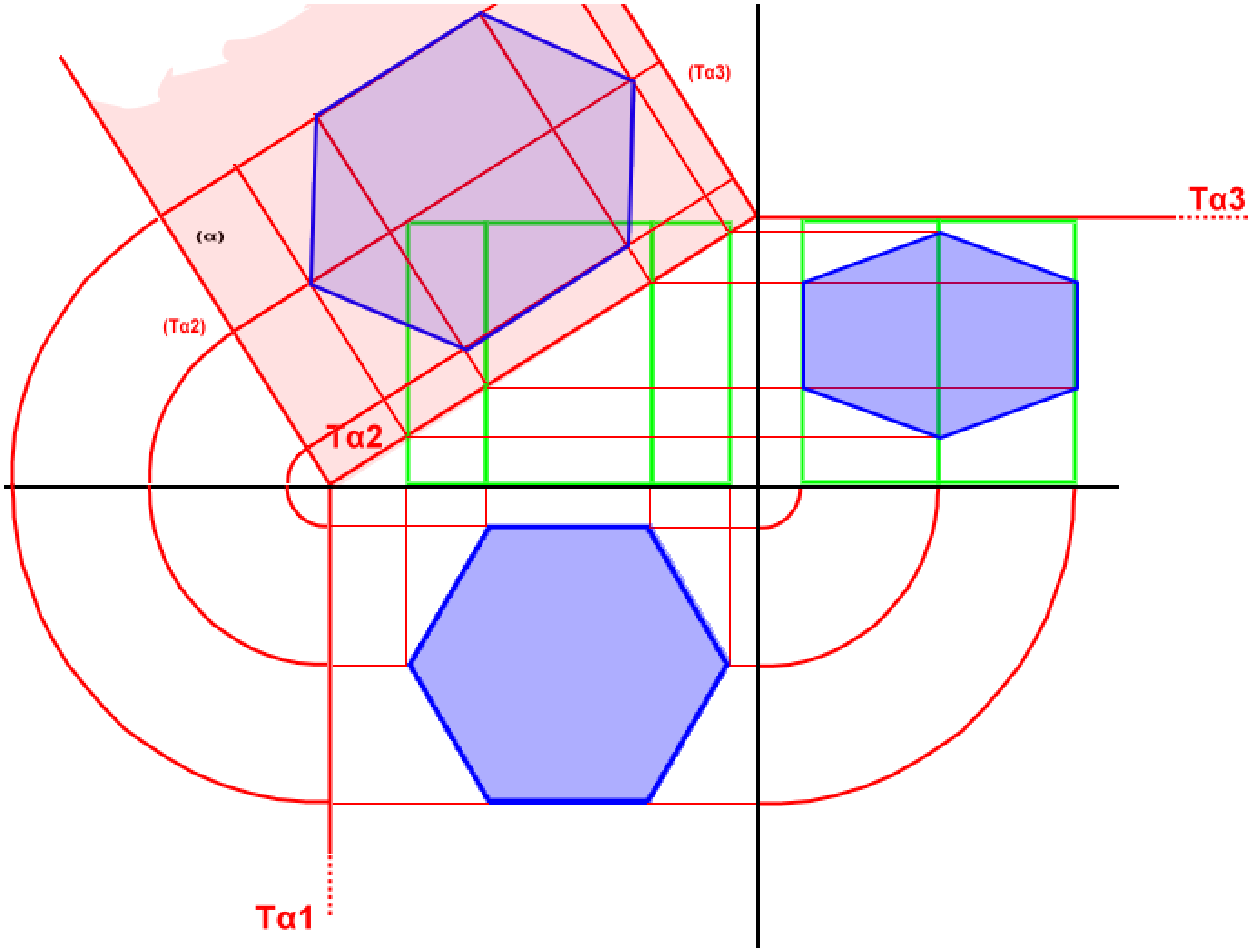
Δ - Sezioni di poliedri con ribaltamento del piano

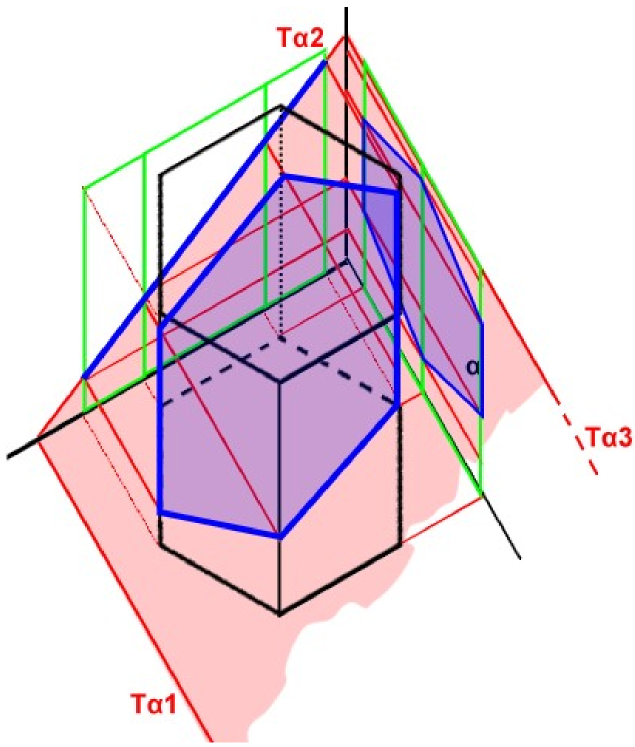
1. Sezione di prisma esagonale determinato da un piano α perpendicolare al PO ed inclinato ai restanti piani.



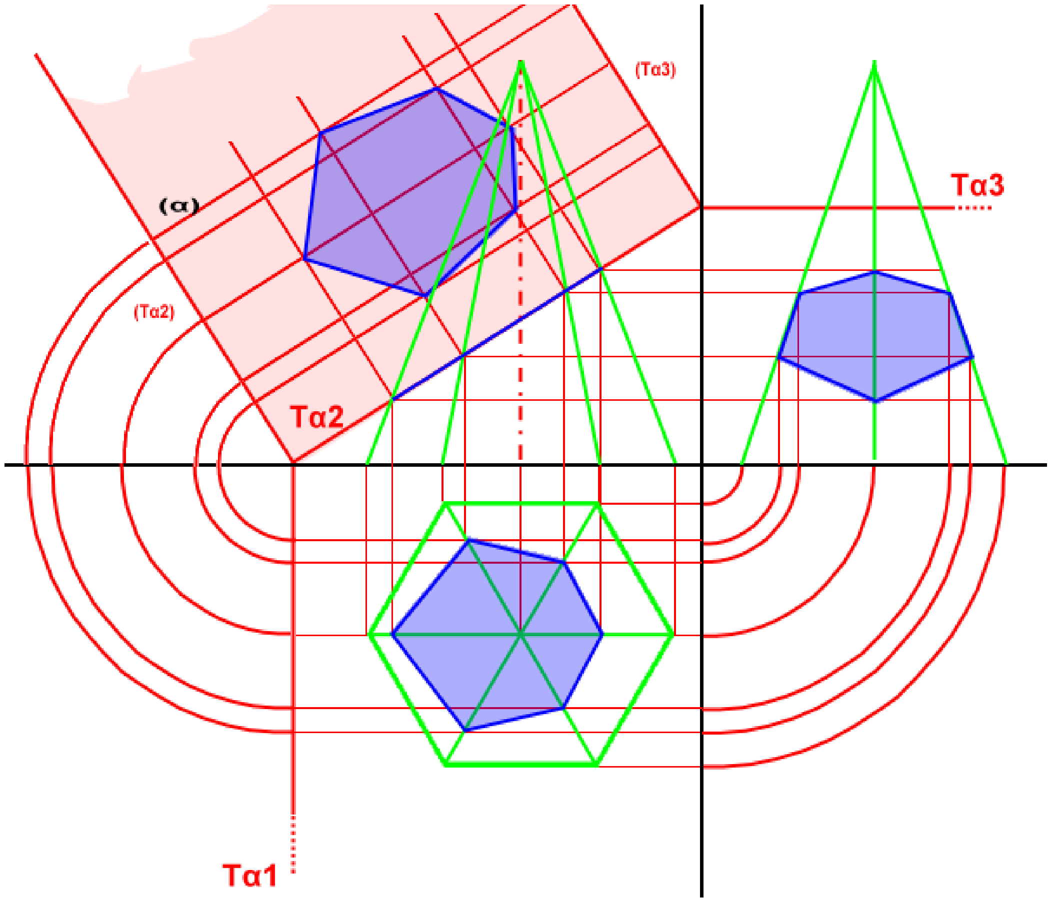


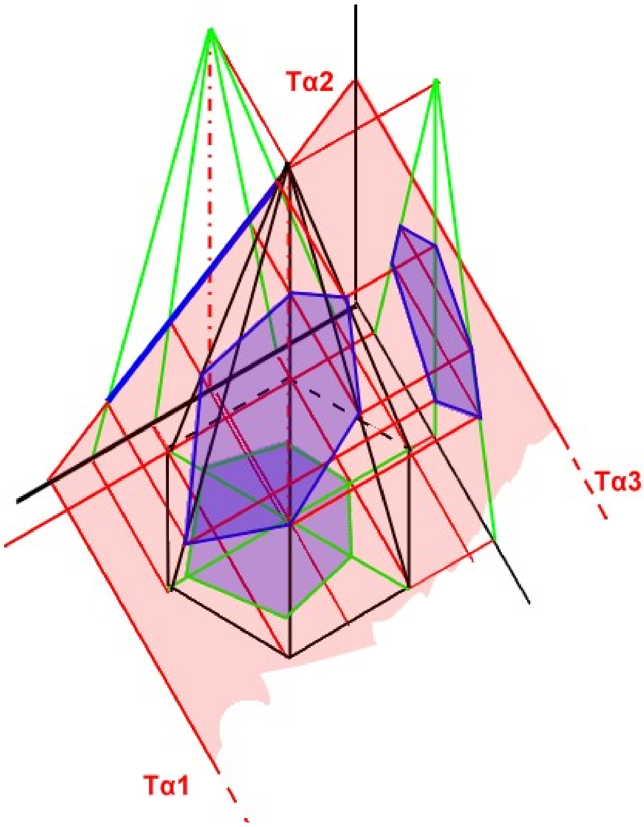
Δ - 2. Sezione di prisma esagonale determinato da un piano α perpendicolare al PV ed inclinato ai restanti piani



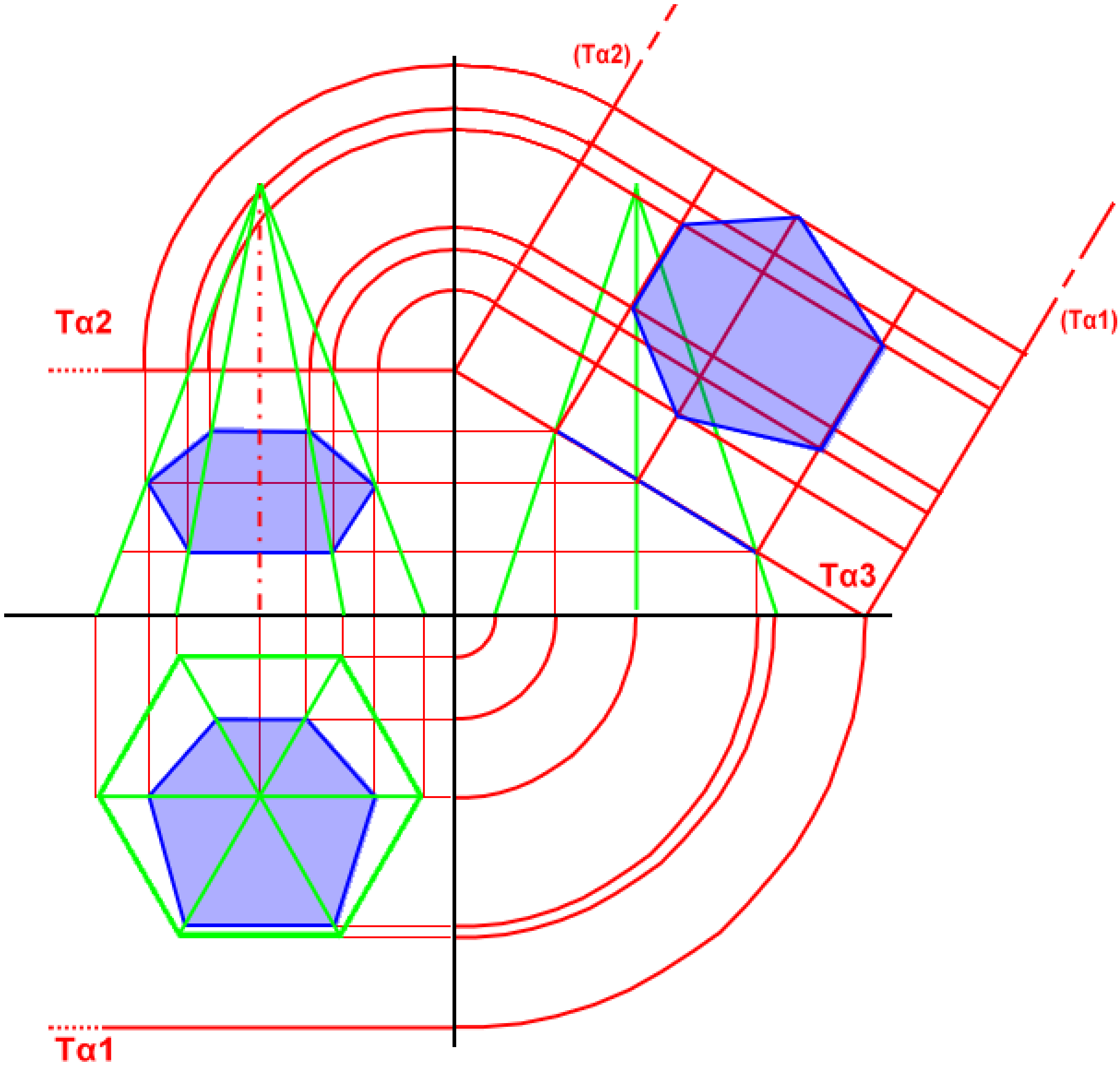


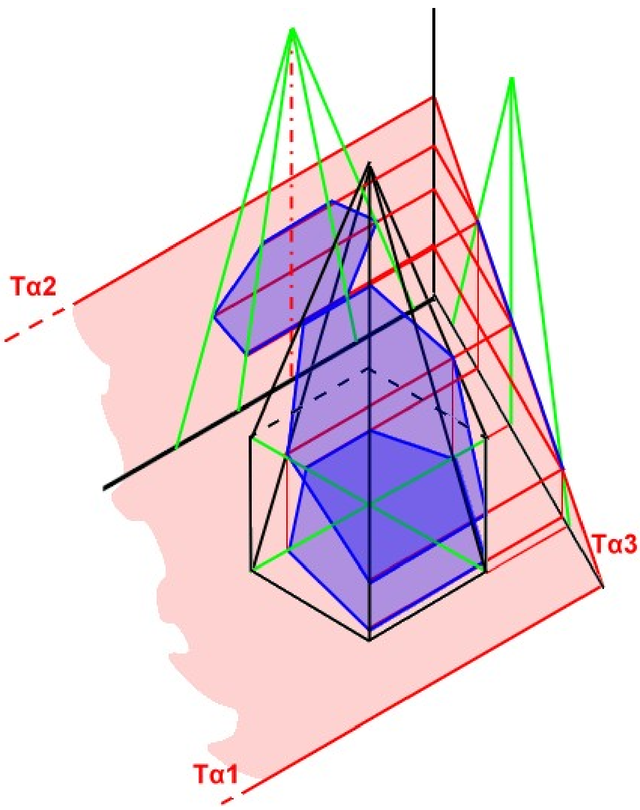
Δ - 3. Sezione di piramide esagonale determinata da un piano α perpendicolare al PV ed inclinato ai restanti piani



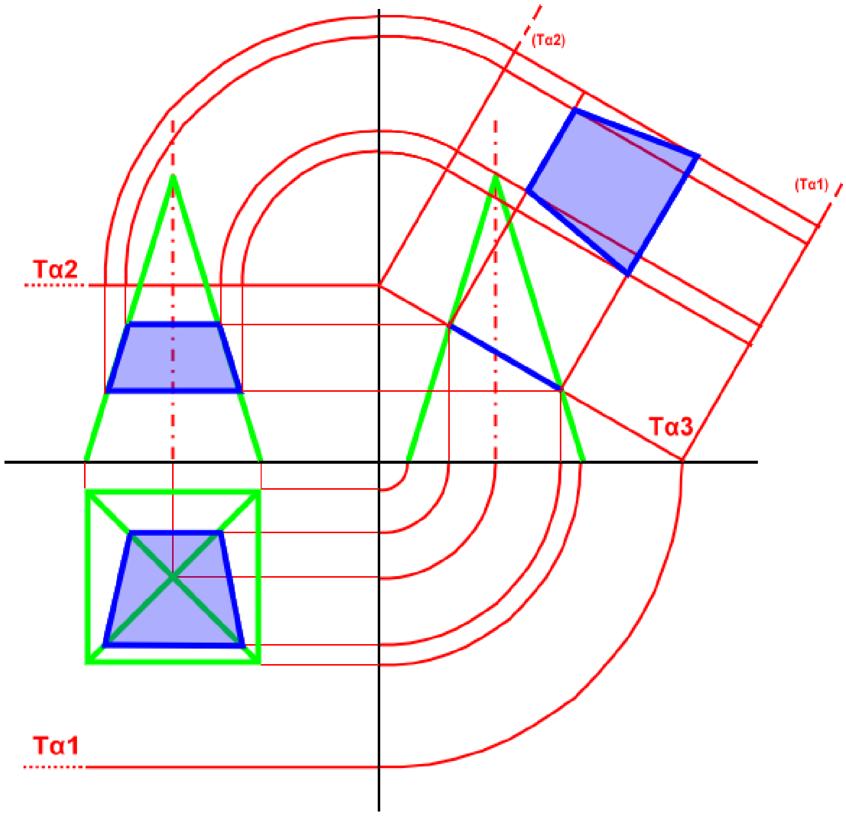


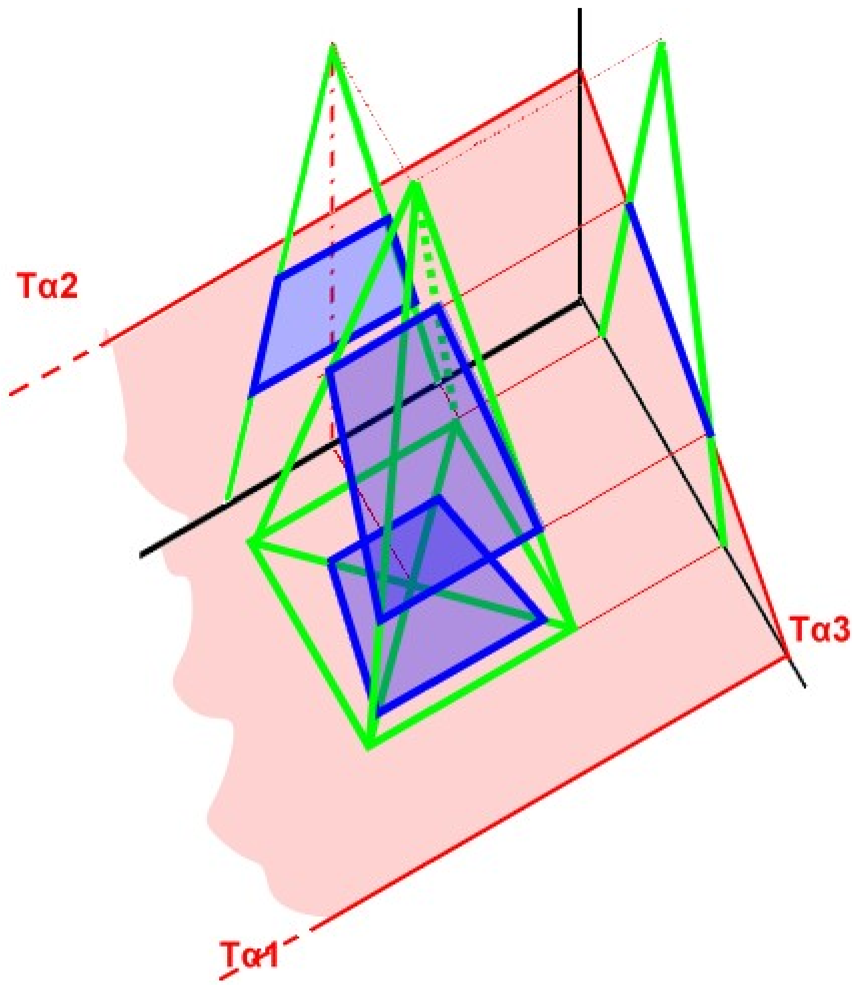
Δ - 4. Sezione di piramide esagonale determinata da un piano α perpendicolare al PL ed inclinato ai restanti piani


(Tα2)
(Tα1)
Tα2
Tα3
Tα1

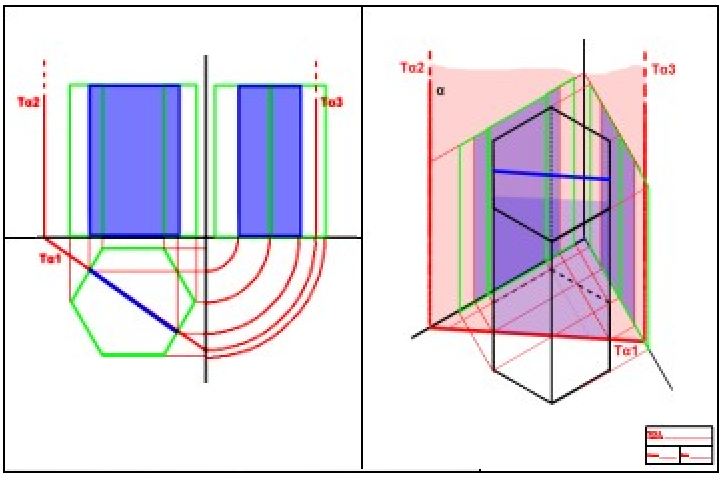

Tα2
Tα3
Tα1

Δ - 5. Sezione di piramide quadrata determinata da un piano α perpendicolare al PL ed inclinato ai restanti piani

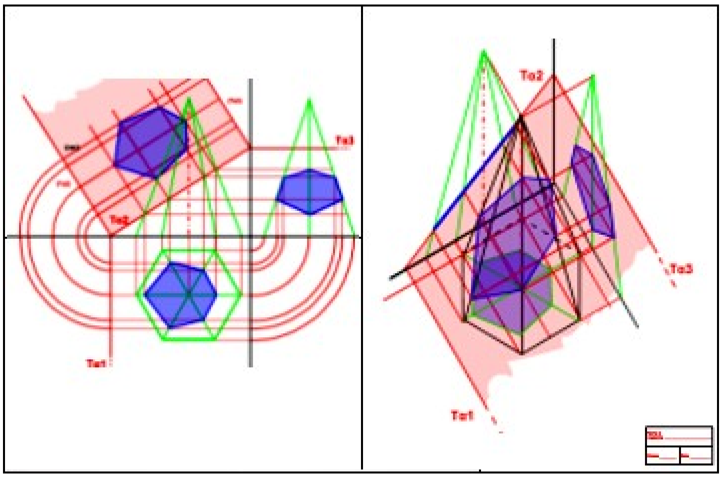




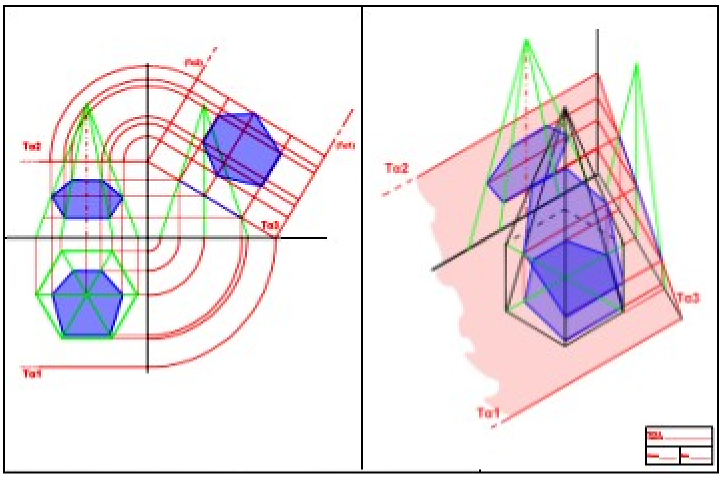
Δ - Tavola 12



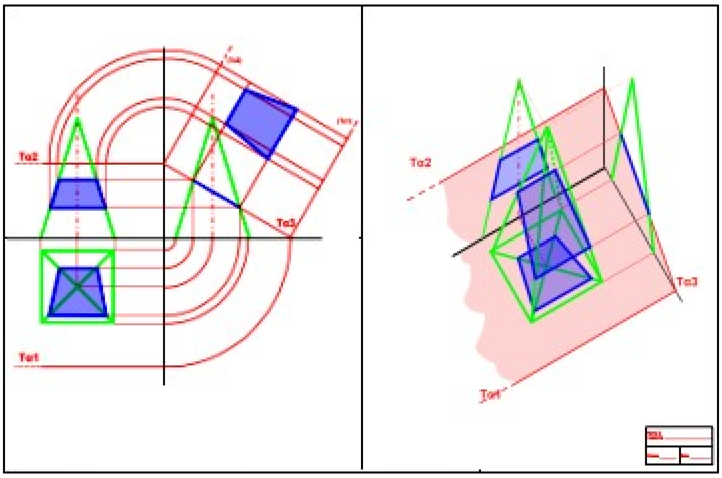
Δ - Tavola 13



Δ - Tavola 14



Δ - Tavola 15



Δ - Introduzione alle Sezioni coniche

Le sezioni coniche che studiamo si ottengono sezionando coni regolari. In particolare il nostro cono poggia con la base circolare sul PO e può essere determinato dalla rotazione di un retta inclinata generica, detta **Generatrice**, su un suo punto qualsiasi (fig. 1) che denominiamo V perché vertice dei due coni contrapposti che si formano con la rotazione. Un cono semplice, naturalmente, si ottiene mediante la rotazione di una semiretta generica sul suo punto d'inizio, che chiamiamo V perché diventa il vertice del solido.

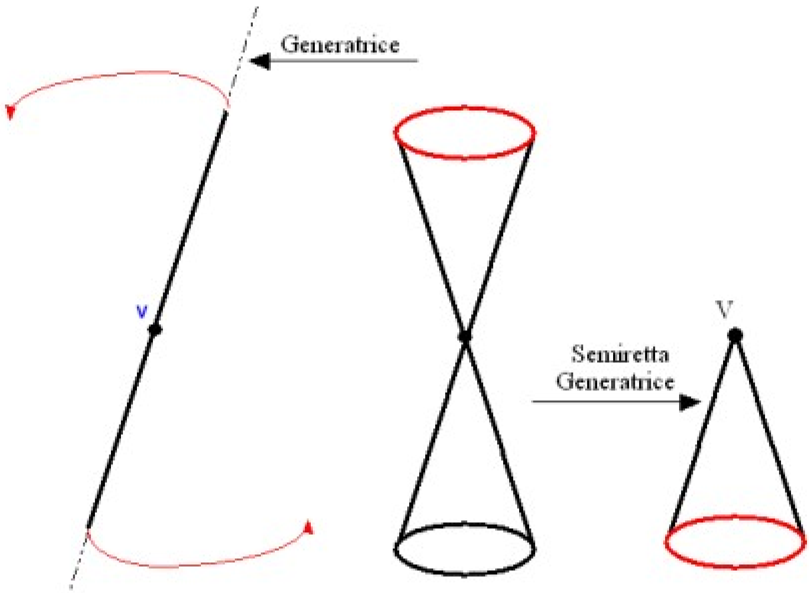


Fig. 1

Se un piano "α" sezionante è parallelo alla retta generatrice, determina una sezione di cono che possiede una curva particolare, che viene denominata curva Parabolica o **Parabola** (fig. 2). Se il piano sezionante "α" è invece parallelo al piano verticale o a quello laterale, in questo caso le sezioni coniche determinano una curva iperbolica o **Iperbole** (fig, 3). Un'ellisse si ottiene mediante un piano "α" perpendicolare al PV ma sezionante interamente il corpo conico ed in questo caso la traccia T"α"1 fuori dalla circonferenza di base del cono stesso (Fig. 4).

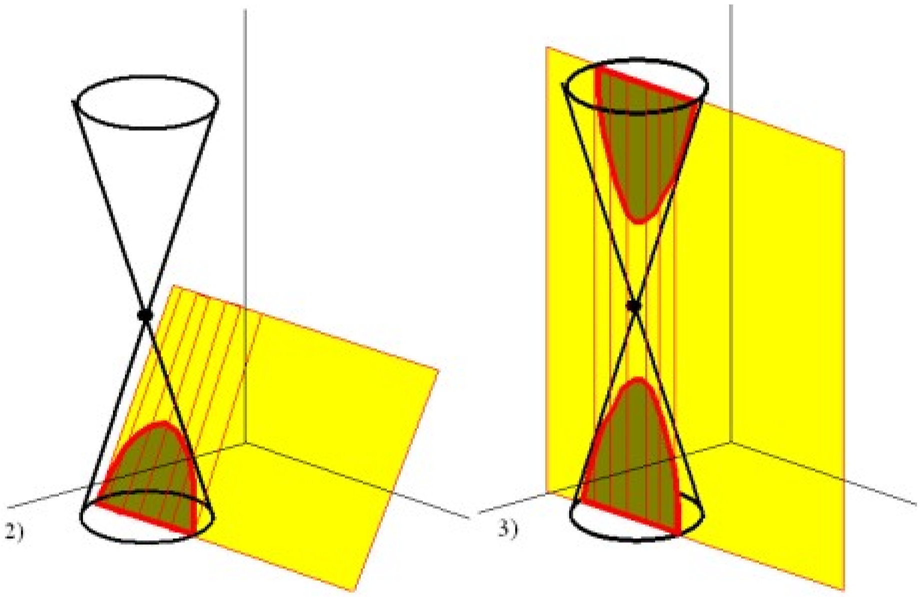


Fig. 2 e Fig. 3 - Sezione di un cono con determinazione di una curva a Parabola e Sezione di un cono con determinazione di una curva ad Iperbole (a destra).

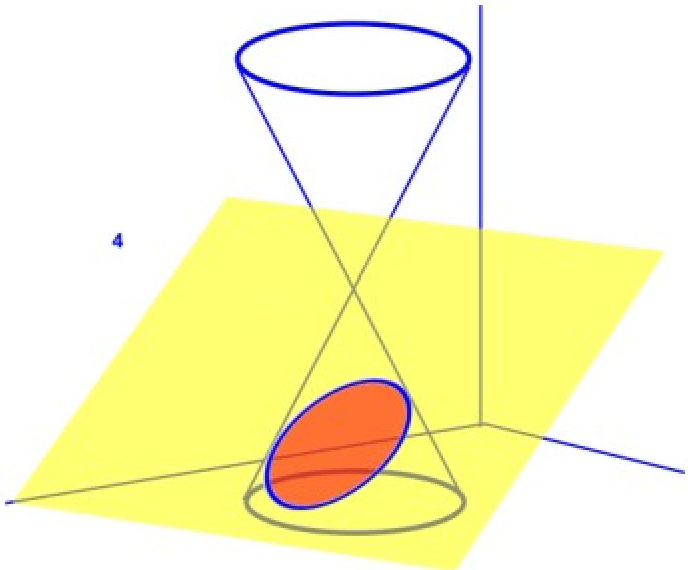


Fig. 4 - Sezione di un cono con determinazione di una curva ellittica

---

Δ - Sezioni coniche col sistema dei piani ausiliari

Prima di osservare le proiezioni ortogonali di una Parabola, specifichiamo con due disegni le sezioni che i piani ausiliari determinano con il cono (fig. 5). Trattandosi di piani paralleli al PO determineranno, inevitabilmente, sezioni circolari concentriche con la base del cono.

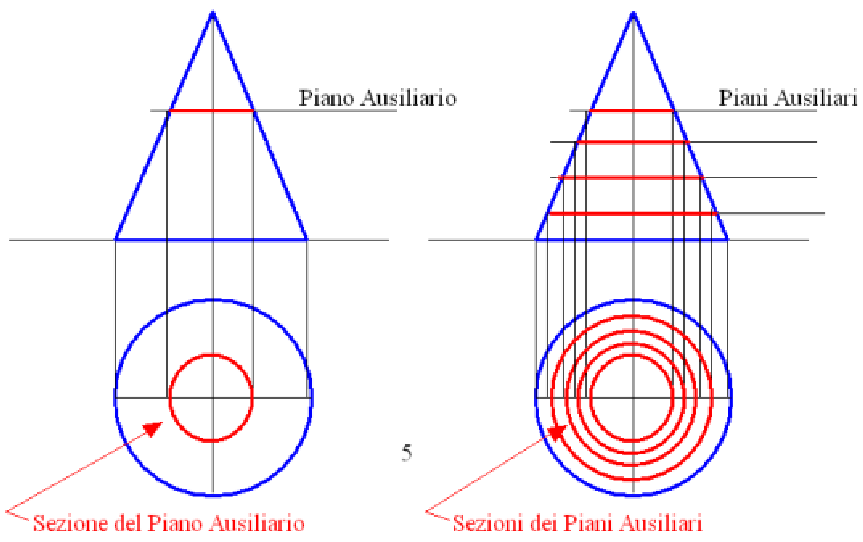
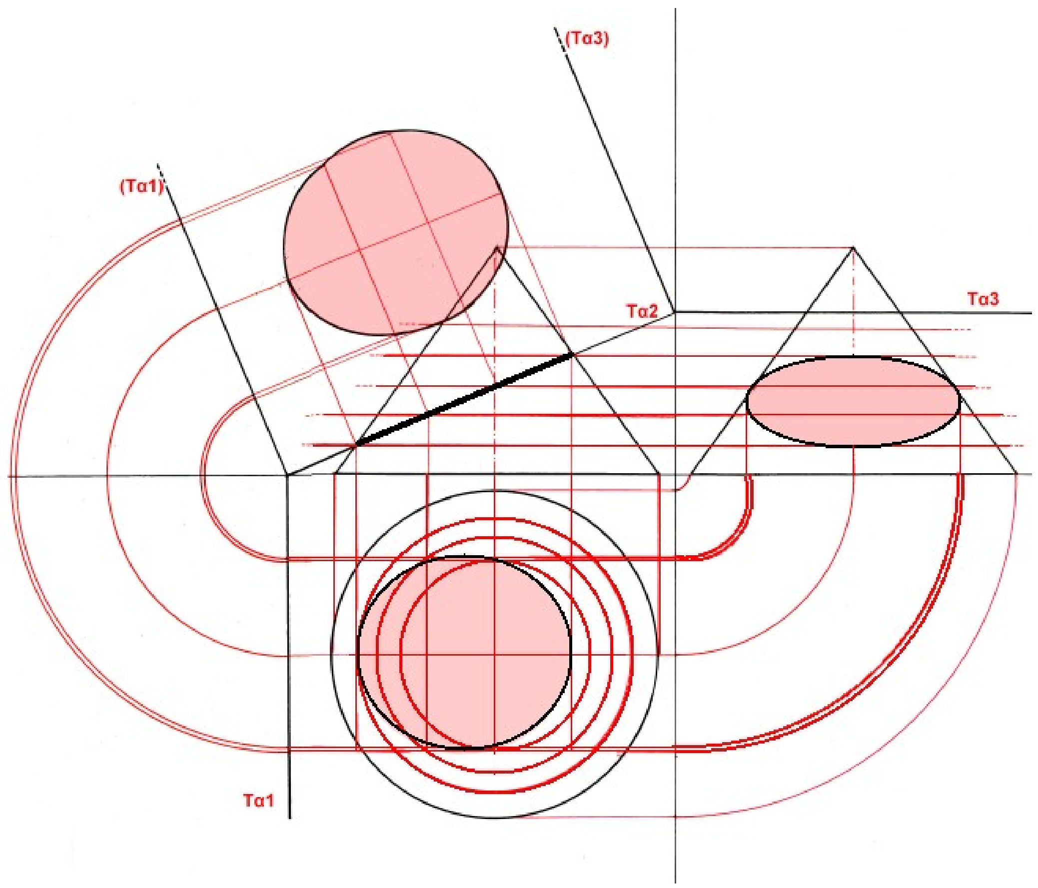


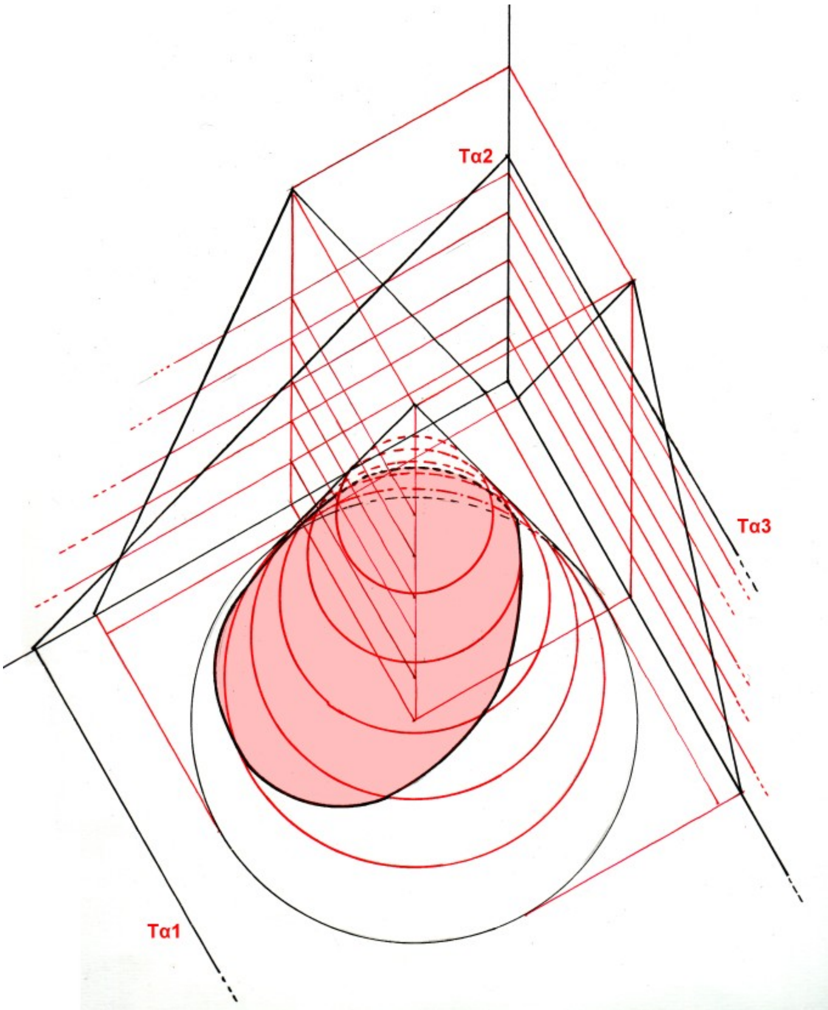
Fig. 5

Il piano sezionante, che chiameremo ancora α, secante i piani ausiliari determina punti di rette tra loro in comune che costituiscono l'ossatura della sezione conica.

Δ - Ellisse

Sezione inclinata e completa del corpo del cono.





Δ - Parabola

Per ottenere le proiezioni ortogonali della parabola e dell'iperbole è sufficiente utilizzare un numero a piacere di piani ausiliari (4 nel nostro esempio) tutti paralleli al PO. Quando le tracce dei piani ausiliari incontrano la proiezione della generatrice sul PV, possono determinare i 4 cerchi concentrici sul PO che sono le sezioni del cono determinate dai 4 piani ausiliari. La proiezione sul PO della sezione conica si ottiene lanciando verso il PO i punti d'incidenza delle tracce dei piani ausiliari con la traccia di α sul PV (la traccia è Tα2), che raggiungono le circonferenze concentriche suddette. Per ottenere la grandezza vera della parabola è necessario ribaltare il piano "α" sul PV mediante una semplice rotazione della traccia T"a"1 sul PV sino a disporsi ortogonalmente rispetto alla T"α"2.

Vediamo il procedimento passo passo:

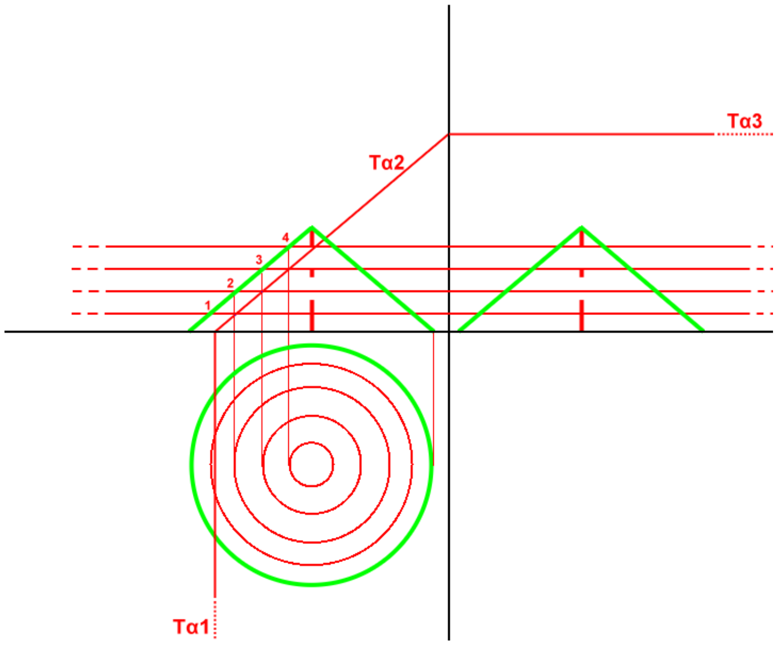
1. Disegna le proiezioni ortogonali del cono da sezionare;

2. Disegna le proiezioni ortogonali del piano α perpendicolare al PV ed inclinato ai restanti piani; costruisci la Tα2 (la traccia di α sul PV) in modo che sia parallela al profilo del cono, ossia ad una porzione di Generatrice;

3. Disegna le tracce di almeno quattro piani ausiliari paralleli al PO, tutti sezionanti il cono e con le tracce sul PV che siano incidenti alla Tα2;

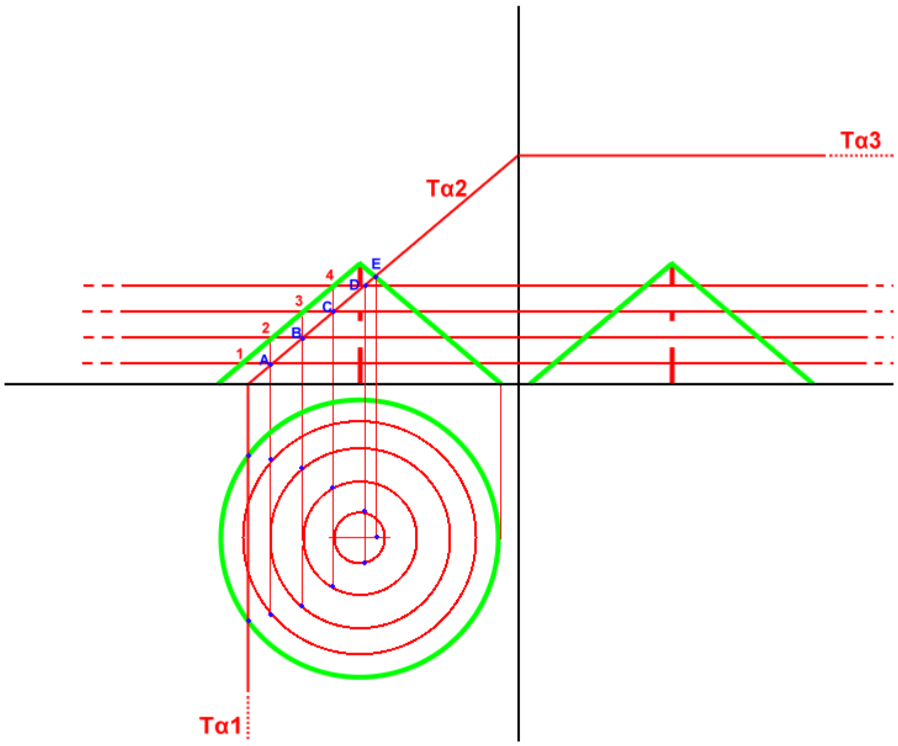
4. Dai punti di incidenza delle tracce dei piani ausiliari con il profilo del cono del PV lancia perpendicolarmente verso la linea di terra e poi verso il diametro orizzontale della base del cono (circonferenza della base del cono con il diametro orizzontale). I punti sono indicati nel disegno con i numeri 1, 2, 3 e 4.

5. Lanciati i punti 1, 2, 3 e 4 dal PV sino al diametro orizzontale della base del cono sul PO traccia le circonferenze concentriche che corrispondo a quattro sezioni coniche di piano ausiliario parallelo al PO.



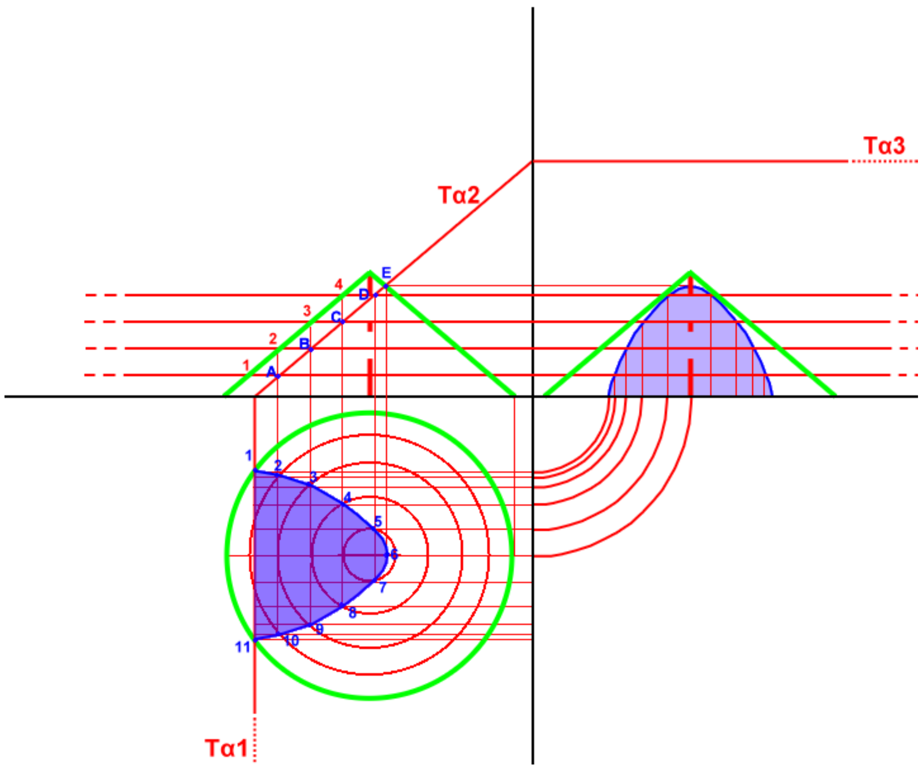
6. Nel disegno sopra riprodotto i cerchi concentrici rossi visibili sul PO sono le sezioni del cono determinate dai quattro piani ausiliari che sul PV incontrano il profilo verde del cono e determinano i punti 1, 2, 3, e 4.

7. Ora bisogna individuare i punti A, B, C, e D sulla Tα2 determinati dalla incidenza della detta traccia con le tracce dei piani ausiliari. Da A, B, C, e D si lancia perpendicolarmente verso la linea di terra e poi sul PO sino ad incontrare i bordi delle circonferenze; dal punto A lanciamo verso le circonferenze e troveremo i punti della parabola sulla sezione circolare più ampia; dal punto B e C avviene la stessa cosa, soltanto che incontrano i cerchi delle sezioni intermedie; dal punto D lanciamo la perpendicolare della linea di terra sino ad incontrare la circonferenza minore tra tutte.



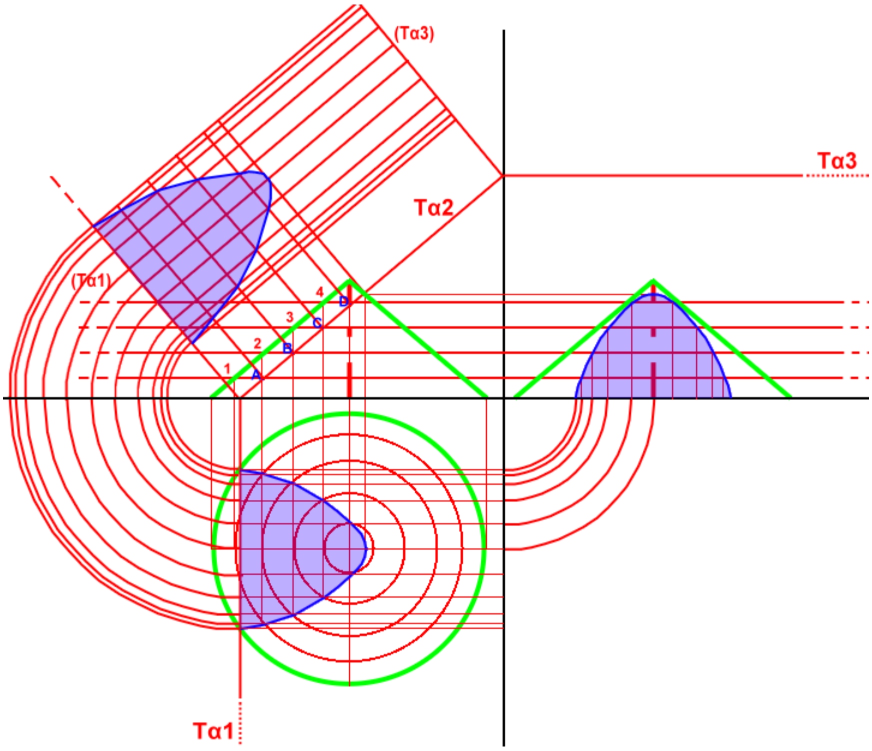
8. Il vertice della parabola deriva dalla perpendicolare dal punto E in figura sino al diametro orizzontale della circonferenza minore. I punti blu nel disegno sopra riportato indicano la proiezione della parabola derivante da una sezione conica sul PO.

9. Ora partendo dai punti blu della proiezione della sezione conica sul PO bisogna lanciare parallelamente alla LT porzioni di rette che raggiungano il piano laterale; dopo il tipico ribaltamento del piano laterale alziamo rispettivamente i punti su ogni traccia dei piani ausiliari sul piano laterale. Bisogna anche lanciare la parallela di LT dal punto E sino all'asse del cono sul PL per ottenere il vertice della parabola



10. Sul PV ribaltiamo le tracce Tα1 e Tα3 che sono perpendicolari alla traccia Tα2. Tali tracce ribaltate prendono nome - (Tα1) e (Tα3).

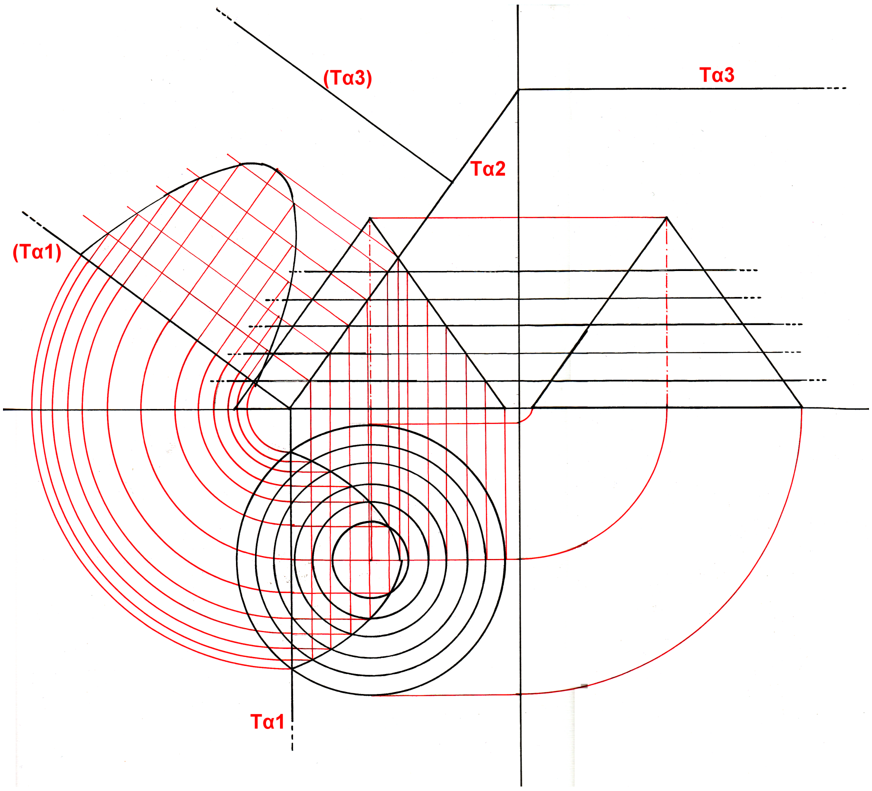
11. Torniamo sul PO; i punti da 1 sino ad 11 della figura sopra riprodotta sono i punti che consentono di delineare la parabola. Tranne il primo e l'ultimo, il n. 1 ed il n. 11, bisogna lanciare parallelamente alla LT i punti della parabola sino alla traccia Tα1 e poi ribaltare gli 11 punti sino alla traccia ribaltata (Tα1).

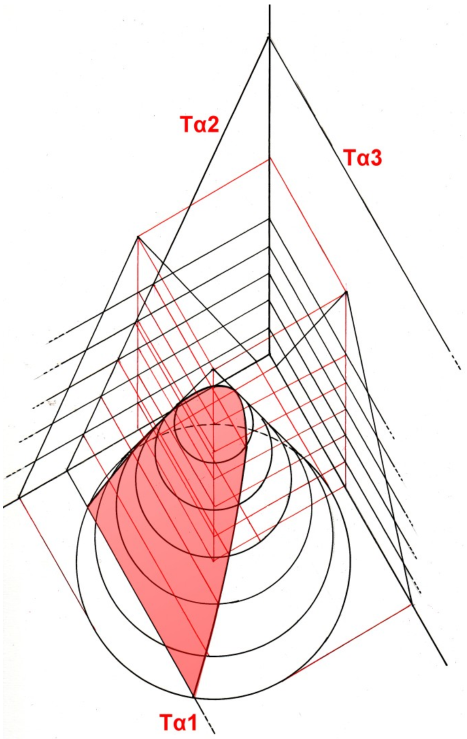


12. Tracciamo le parallele di Tα2 partendo dai punti che abbiamo realizzato su (Tα1).

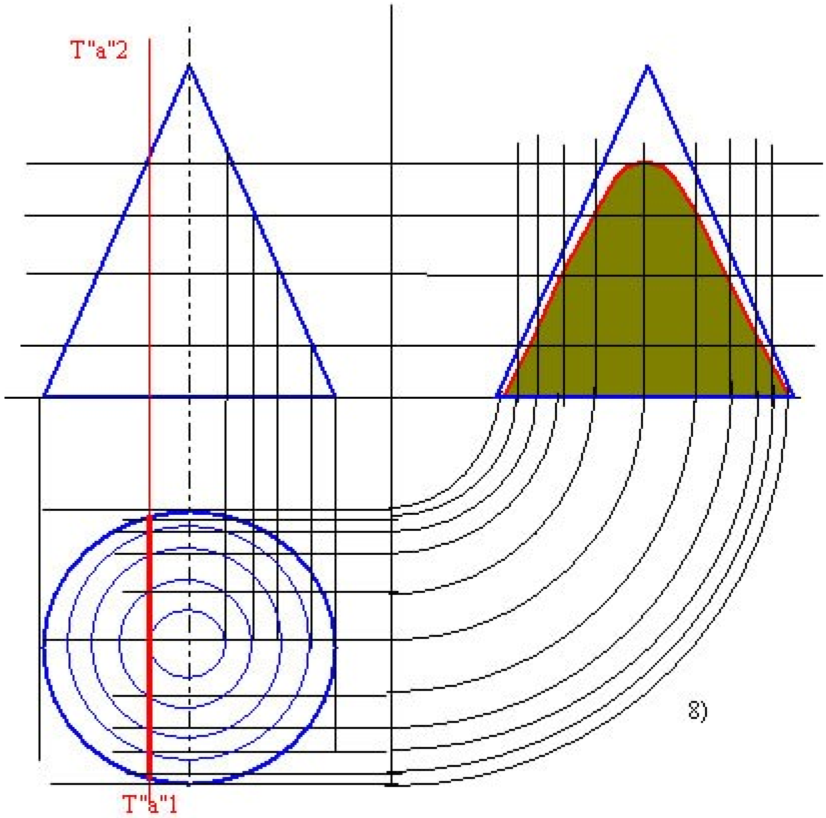
13. Dai punti A, B, C, D ed E tracciamo le perpendicolari di Tα2. Costruiamo la parabola nella sua grandezza vera, perché abbiamo ribaltato il piano sezionante α sul PV facendo in modo che la sezione ivi compaia nella sua misura reale.

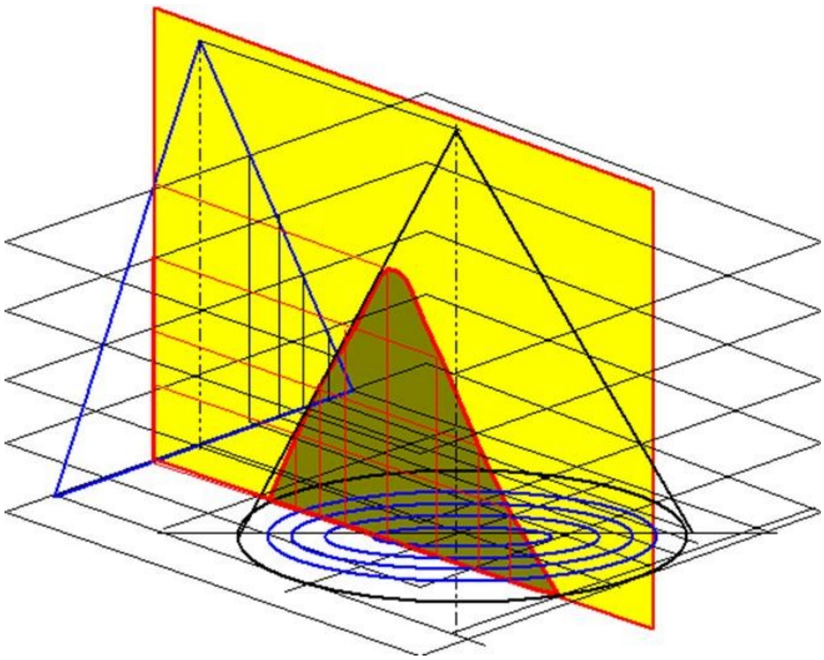
14. Riempire di retino colorato o con matita colorata la porzione di superficie compresa nella sezione conica.





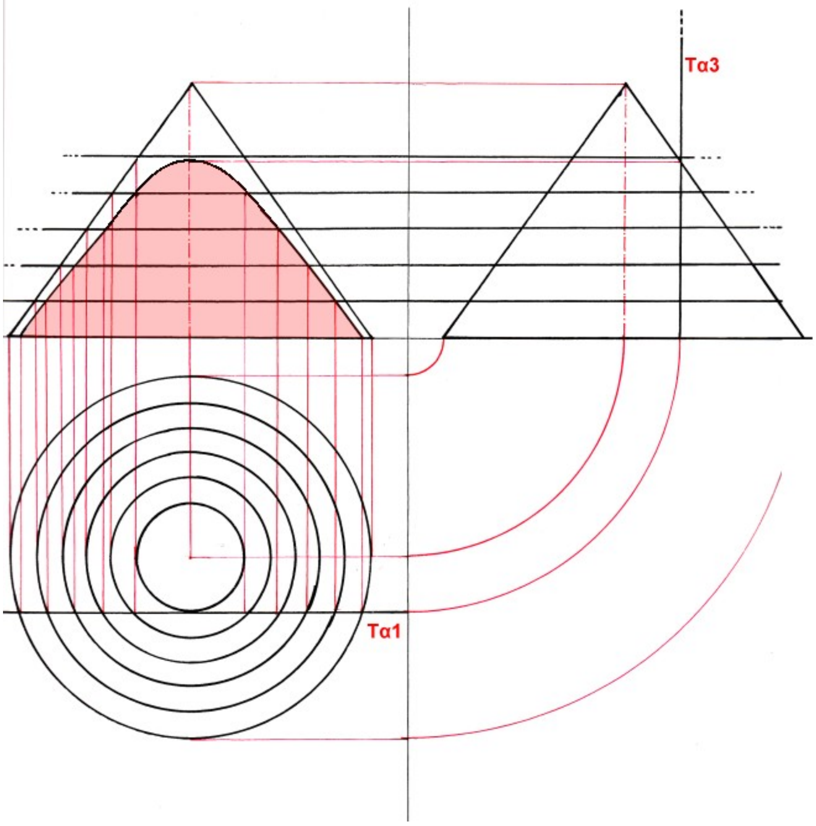
Δ - Iperbole

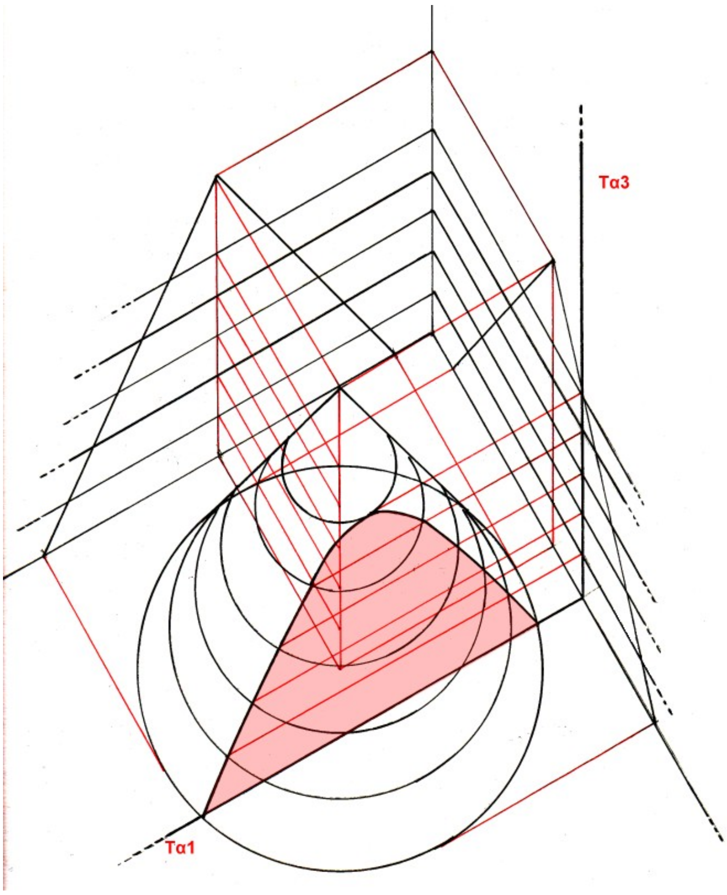




Assonometria isometrica di un cono poggiante sul PO sezionato da un piano alfa perpendicolare al PO, con determinazione di una iperbole.

Nel prossimo disegno il piano sezionante è parallelo al PV; la proiezione dell'iperbole è quindi sul PV.





Δ